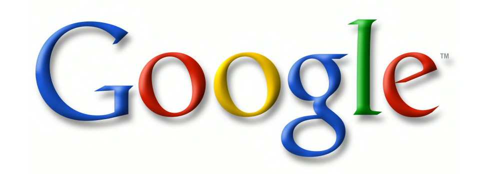



3 3433 06945835 8







L'ART
DE
CONJECTURER,

Traduit du latin de JACQUES BERNOULLI;

Avec des Observations, Éclaircissemens et Additions.

PAR L. G. F. VASTEL, Membre du Lycée et de la Société d'Agriculture et de Commerce de Caen.

Periculo sæ plenum opus aleæ.

Première Partie.



De l'Imprimerie de G. LE ROY, Imprimeur-Libraire, rue Notre-Dame, ancien Hôtel des Monnaies, à Caen.

AN X — 1801.

PRÉFACE

DU TRADUCTEUR.

J'ai entrepris d'enrichir notre langue du plus beau monument de l'un des plus grands génies du siècle dernier, de rendre familière en France une théorie plus importante qu'on ne paraît l'imaginer.

Cette théorie, inventée et fondée par Paschal, à l'occasion de deux questions qui lui furent faites par un joueur, n'eut d'abord pour objet que quelques jeux de hasard. L'analyse des plus vaines de ces combinaisons n'a pourtant rien de futile : elle en fait cesser l'illusion qui cause la ruine de tant de fortunes. Le Gouvernement fit autrefois d'inutiles efforts pour proscrire le jeu de la bassette : Sauveur ne fit qu'en calculer les chances, et l'on vit finir, avec la fureur des joueurs, les disputes sanglantes qui en étaient les suites. Et comment pourrait-on faire tourner au profit de l'État la passion des hommes pour le jeu, si l'on n'avait appris à calculer les hasards de ces contributions volontaires, connues sous le nom de loteries?

Ces sortes de problèmes excitèrent l'émulation des premiers géomètres de l'Europe ; mais cette nouvelle analyse devait recevoir beaucoup d'autres applications. Deparcieux l'employa pour déterminer la durée moyenne de la vie des hommes, et les taux des rentes à terme ou des annuités, et des rentes viagères. Condorcet l'a appliquée depuis aux décisions qui se prennent à la pluralité des voix. Je ne crains pas de dire que son usage est presqu'universel. Les prix des assurances et des prêts à la grosse aventure, ne reconnaissent pas d'autres règles. C'est l'art de conjecturer qui dirige toutes les spéculations commerciales, et même la plupart des actions humaines.

Toute notre prudence consiste à calculer des probabilités. Presque tous les événemens sont pour notre ignorance des cas fortuits dont nous avons à méditer les combinaisons diverses pour trouver les règles de notre conduite. Les plus grands politiques ne sont occupés qu'à résoudre des problèmes aléatoires. Les plus habiles sont ceux qui savent le mieux en saisir les données et les mettre en équation. Ils font cette opération sans y songer : l'esprit d'observation, la mémoire, une longue habitude, une grande attention, leur tiennent lieu de règles et de formules.

Mais ces formules et ces règles pourraient être à tout le monde d'une grande utilité, non-seulement pour les probabilités qui, par leur importance, exigent un calcul

rigoureux et qui en sont susceptibles, mais encore pour les conjectures plus vagues ou d'un moindre intérêt : car les directions de l'art accoutument à la justesse et la rendent facile, en donnant à l'esprit la tournure nécessaire pour aller au but.

Telle est l'étendue de l'art de conjecturer, que l'auteur de cet ouvrage s'était proposé de l'appliquer aux affaires civiles, morales et économiques; et l'on trouve dans la quatrième partie les bases de ce grand édifice, qu'une mort prématurée l'a forcé de laisser imparfait.

Cet art n'exige, pour l'ordinaire, que quelques connaissances algébriques fort communes; mais il a ses difficultés. Les illusions sont fréquentes, les analogies trompeuses et les erreurs si faciles, que l'auteur nous avertit à chaque instant de nous tenir perpétuellement sur nos gardes, afin de ne pas prendre l'ombre pour la réalité. Paschal entreprit de convaincre Fermat d'un parallogisme qu'il commettait lui-même, et nous avons vu naguères un illustre geomètre attaquer l'art jusques dans ses fondemens.

La difficulté, la délicatesse et l'importance du sujet, ont excité mon zèle. J'ai tâché de répondre à la clarté du texte et de le rendre avec exactitude. J'ai fait tous mes efforts pour rendre la science aisée, pour l'inculquer de toutes les manières, et pour en pénétrer de toutes parts ceux qui prendront la peine de lire les observations, éclaircissemens et additions, que je leur ai consacrés.

Mais une juste défiance me force de me borner maintenant à la première partie de l'ouvrage, et de la soumettre d'abord au jugement du public. On y trouve les premiers élémens de l'art de conjecturer. On peut la considérer comme un ouvrage complet, puisqu'elle contient tout le traité de Huyghens, avec le commentaire de Bernoulli : et la méthode de Huyghens est si féconde, qu'il n'est peut-être pas de questions qu'elle ne puisse attaquer avec succès.

Si le public jugeait favorablement de cet essai, je lui offrirais la suite de mon travail; car j'ai achevé la traduction de la seconde et de la troisième partie, et préparé celle de la quatrième, et je conserve les matériaux de quelques nouvelles observations.

NICOLAS BERNOULLI,

AU LECTEUR.

Enfin, voici *l'art de conjecturer*, ce traité posthume de mon oncle, si long-temps désiré. Les frères Thurnisius, comptant faire une chose agréable au public, ont acquis le manuscrit des héritiers de l'auteur, et l'ont fait imprimer à leurs frais. L'auteur s'est proposé de faire connaître l'insigne utilité que peut avoir dans la vie civile cette partie des mathématiques, qui a pour objet la mesure des probabilités. On a déjà vu dans les mémoires de l'académie des sciences, de l'année 1705, et dans les éphémérides de Paris, de l'année 1706, par quelle méthode, et jusqu'à quel point l'auteur a rempli la tâche qu'il s'était imposée. Il a divisé son ouvrage en quatre parties. La première contient le traité de l'illustre Huyghens, *De la manière de raisonner dans les jeux de hasard*, avec des notes, dans lequel on trouve les premiers élémens de l'art de conjecturer. La seconde partie comprend la théorie des permutations et des combinaisons; théorie si nécessaire pour le calcul des probabilités, et dont il explique l'usage, dans la troisième partie, pour la solution de différentes sortes de problèmes

sur les jeux de hasard. Dans la quatrième, il avait entrepris d'appliquer les principes précédemment développés, aux affaires civiles, morales et économiques ; mais, arrêté long-temps par sa mauvaise santé, enfin, prévenu par la mort même, il a été obligé de la laisser imparfaite. Les éditeurs auraient bien désiré que le frère de l'auteur, si capable d'achever cet ouvrage, se fût chargé de le compléter ; mais ils lui connaissaient trop d'autres affaires pour ne pas craindre de lui en faire la proposition. Comme ils savaient que dans une dissertation *inaugurale* j'avais donné quelques essais sur cet art appliqué au droit, ils avaient aussi songé à moi pour cette entreprise ; mais mon absence et mes voyages ne me permettaient pas de m'en charger. A mon retour, ils voulurent encore m'y engager, et je crus devoir m'en défendre. J'étais trop jeune et trop dépourvu de cette longue expérience qu'il faut avoir pour traiter une pareille matière. Je ne me trouvai point assez de forces, et je n'eus pas de peine à me persuader que non-seulement je ne répondrais point à l'attente du lecteur, mais même qu'en ne donnant que des choses vulgaires et triviales, je ferais tort au reste de l'ouvrage. L'impression de ce traité étant déjà fort avancée, je leur conseillai de le donner au public tel que l'auteur l'avait laissé. Cependant, comme il ne faut pas qu'une chose aussi utile que l'application du calcul des probabilités aux

affaires économiques et politiques, tombe tout-à-fait dans l'oubli, nous prions l'illustre auteur du livre français, *Essai d'analyse sur les jeux de hasard*, et le célèbre Demoivre, qui ont donné, depuis assez peu de temps, d'excellens morceaux sur cet art, de se livrer à ce travail, et d'y consacrer une partie du temps qu'ils destinent à l'utilité publique. Nous espérons, toutefois, que les généralités données par l'auteur, dans les cinq chapitres de la dernière partie, offriront au lecteur des principes d'un usage important pour la solution des questions particulières. Voilà ce que nous avions à dire de ce traité. Les éditeurs y ont joint les propositions sur les suites infinies, dont l'auteur avait fait l'objet de cinq dissertations, qu'on ne trouve presque plus chez nos libraires; ce qui les a déterminés à faire réimprimer ces propositions à la suite de cet ouvrage. L'affinité de la matière y a fait joindre aussi l'épître française de l'auteur, intitulée: *Lettre à un ami, etc.*

L'ART DE CONJECTURER.

PREMIÈRE PARTIE,

CONTENANT le traité de HUYGHENS *de la manière de raisonner dans les jeux de hasard;*

AVEC les remarques de Jacques BERNOULLI.

CHRET. HUYGHENS,

A FRANÇ. SCHOOTEN.

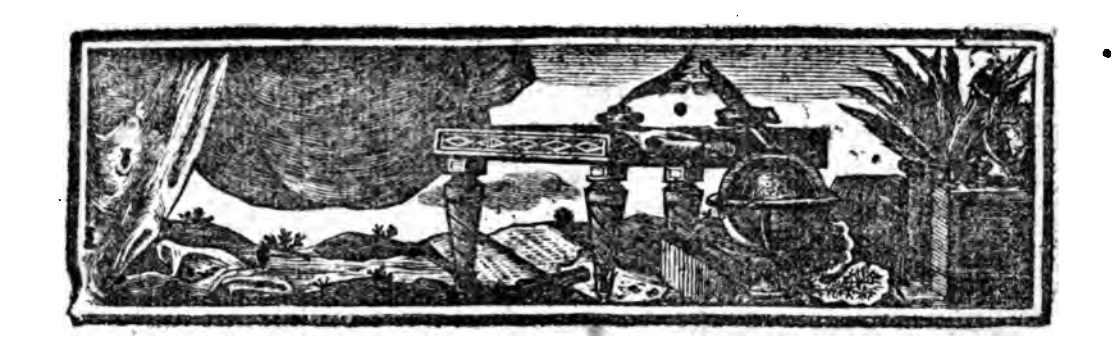
PRÉFACE.

COMME je sais que dans l'édition que vous préparez ~~possédez~~ + maintenant des beaux monumens de votre génie, homme très-illustre, vous vous proposez, sur-tout, de faire connaître, par la variété des sujets que vous avez entrepris de traiter, jusqu'où s'étend la divine science de l'Analyse, je n'ai pas de peine à concevoir que ce que j'ai écrit sur la manière de raisonner dans les jeux de hasard, puisse être très-utile à vos vues; car, moins il paraissait possible de comprendre, dans les bornes de la raison les choses

+ quam prae manibus habes — Dans l'ori[ginal]

fortuites et incertaines, plus il y aura lieu d'admirer l'art auquel ces choses mêmes sont encore soumises. C'est pour vous que j'ai d'abord formé le dessein d'exposer cette théorie ; et, comme vous l'avez jugée digne de voir le jour avec des conceptions aussi subtiles que les vôtres, je suis si loin de m'y opposer, que, par cette raison principalement, je crois ne pouvoir que gagner à ce qu'elle soit rendue publique. On aurait pu dire que je me serais trop occupé d'une chose légère et frivole ; mais on ne regardera plus comme sans utilité et sans valeur, ce que vous aurez adopté parmi vos propres production, et fait passer, non sans beaucoup de travail, de notre idiome dans la langue latine : et cependant, si l'on veut examiner à fond ce que nous enseignons, l'on ne tardera pas à reconnaître qu'il ne s'agit point d'un pur amusement, mais des principes d'une belle et d'une très-subtile théorie. Je me flatte même que les problèmes de ce genre ne paraîtront pas moins importants que ceux de Diophante, quant à la profondeur des recherches ; et que, ne se réduisant pas, comme ceux-ci, à une pure considération des nombres, ils feront encore plus de plaisir. Mais, afin qu'on ne m'attribue pas indûment l'honneur de la première invention, je dois dire que, depuis long-temps, les plus grands géomètres de toute la France se sont occupés de ce genre de calcul ; mais, en résolvant les questions très-difficiles qu'ils se proposaient récipro-

quement, ils cachaient leurs méthodes, de sorte que j'ai été obligé de remonter jusqu'aux premiers élémens de la matière. J'ignore donc encore s'ils partent du même principe que moi; mais l'expérience m'a souvent fait connaître que nos solutions quadrent parfaitement. On trouvera à la fin de l'ouvrage quelques-uns de ces problèmes. Je les ai donnés sans analyse, non-seulement parce que je n'aurais pu être clair sans entrer dans de trop longs détails, mais encore parce que j'ai cru devoir laisser quelque chose pour exercer les lecteurs, s'il s'en trouve.



DE LA MANIERE DE RAISONNER DANS LES JEUX DE HASARD.

QUOIQUE dans les jeux de pur hasard les événemens soient incertains, on peut néanmoins déterminer avec certitude de combien un joueur est plus près de gagner que de perdre. Par exemple, si quelqu'un parie qu'il amènera six points avec un seul dé au premier coup, on ne peut pas dire s'il gagnera; mais la probabilité qu'il a de gagner ou de perdre n'a rien de douteux, et l'on peut la soumettre au calcul. De même, si je joue avec quelqu'un une partie en trois jeux, et que j'en aye déjà gagné un, on ne sait pas encore lequel des deux le premier en aura trois de gagnés; mais on peut découvrir, par des raisonnemens très-certains, la valeur de son espérance et celle de la mienne, et déterminer, en conséquence, dans quelle propor-

tion le dépôt ou la mise commune devrait se partager entre nous, si nous convenions de quitter la partie en cet état ; ou pour quel prix je pourrais équitablement vendre mon sort à quelqu'un qui désirerait me remplacer. Il peut s'élever une infinité de questions semblables entre deux, trois, etc. joueurs : mais comme ce genre de calcul n'est nullement vulgaire, et qu'on a souvent l'occasion d'en faire usage, j'en exposerai ici la méthode en peu de mots, et j'expliquerai ensuite ce qui concerne spécialement les dés.

Le principe fondamental de ma méthode est que, dans les jeux de hasard, la valeur du sort ou de l'attente de chaque joueur est précisément ce qu'il faudrait qu'il eût pour parvenir de nouveau, en jouant à jeu égal, à un sort ou à une attente semblable. Par exemple, si quelqu'un cache trois sous dans une main et sept sous dans l'autre, et qu'il m'en donne le choix, je dis que cet avantage est pour moi le même que s'il me donnait cinq sous ; car, avec cinq sous, je puis me retrouver dans le cas d'avoir une attente égale pour trois sous ou pour sept sous, et cela en jouant à jeu égal.

PROPOSITION PREMIÈRE.

Si j'attends a *ou* b, *et que l'un puisse m'échoir avec la même facilité que l'autre, mon attente vaut* $\frac{a+b}{2}$.

Voici comment on peut, non-seulement démontrer, mais encore trouver cette régle.

Soit x la valeur de mon attente. Il faut qu'ayant x, je puisse, en jouant à jeu égal, parvenir

de

de nouveau à un sort semblable. Supposez donc que je joue avec un autre aux conditions suivantes : 1°. que chacun dépose x ; 2°. que celui qui gagnera le dépôt, donne a à son adversaire. Ces conditions sont justes, et il est clair que je puis, avec la même facilité, avoir a et $2x-a$; savoir, a si je perds le pari, et $2x-a$ si je le gagne : car, dans ce dernier cas, j'ai le dépôt $2x$, dont je dois donner a à mon antagoniste. Si donc $2x-a$ a la même valeur que b, j'ai une égale probabilité pour a et pour b : ainsi je fais $2x-a=b$, et j'ai $x=\frac{a+b}{2}$ pour la valeur de mon attente. La démonstration en est facile; car, ayant $\frac{a+b}{2}$, je puis jouer avec un autre qui déposera aussi $\frac{a+b}{2}$, à condition que celui qui gagnera le pari donnera a à celui qui le perdra. De cette manière, mon sort est égal pour a et pour b ; car j'ai a si je perds le pari, et j'ai b si je le gagne, puisque, dans ce dernier cas, je gagne le dépôt $a+b$, dont je donne a à mon adversaire.

En nombres. Si je dois avoir 3 ou 7, et avec une égale probabilité, mon attente vaut 5 d'après la proposition précédente ; et il est certain qu'ayant 5 je puis parvenir encore à la même attente : car ayant 5 je puis jouer avec quelqu'un 5 contre 5, à condition que celui qui perdra le pari donnera 3 à l'autre. La loi du jeu sera parfaitement juste, et il est évident que mon sort sera égal pour 3 et pour 7; car j'aurai 3 si je perds le pari, et 7 si je le gagne, puisque, dans ce dernier cas, j'aurai 10, dont mon adversaire retirera 3.

REMARQUES.

L'auteur de ce traité expose en général, à la fin de son préambule, et d'une manière plus particulière, sur la proposition précédente et les deux suivantes, le principe fondamental de tout l'art de conjecturer. Comme il est très-important que ce principe soit bien entendu, je tâcherai de le démontrer par un raisonnement plus familier et plus à la portée de tout le monde, en partant seulement de cet axiome ou de cette définition : que *chacun doit attendre ou est supposé devoir attendre ce qu'il obtiendra infailliblement.* Pour l'appliquer à la première proposition, imaginons que quelqu'un ait caché 3 sous ou a dans une main et 7 sous ou b dans l'autre, que ce qu'il y a dans une doive être pour Titius, et ce qu'il y a dans l'autre pour moi ; de cette manière, nous aurons infailliblement ensemble, et, par conséquent, nous devons attendre conjointement ce qui se trouve caché dans les deux mains, c'est-à-dire, 10 sous, ou $a + b$. Mais il faut convenir aussi que Titius et moi nous avons le même droit à ce que nous attendons ensemble ; d'où il s'ensuit que l'objet de l'attente totale doit se diviser en deux parties égales, et que nous devons avoir chacun une de ces parties, ou la moitié de ce que nous attendons ensemble, c'est-à-dire, 5 sous ou $\frac{a+b}{2}$.

Corollaire. On voit par-là que s'il y a a dans une main, et rien dans l'autre, la valeur de l'attente de chacun séparément sera $\frac{1}{2}a$.

Scholie. On peut conclure de ce qui précède que le mot *attente* ne doit pas se prendre ici dans

le sens ordinaire, selon lequel attendre ou espérer se rapporte à l'événement le plus favorable, quoique le contraire puisse arriver ; mais on doit entendre par ce mot l'espérance que nous avons d'obtenir le meilleur, tempérée et diminuée par la crainte du pire ; de sorte que la valeur de notre attente signifie toujours quelque chose d'intermédiaire entre le meilleur que nous espérons et le pire que nous craignons : c'est de cette manière qu'on doit l'interpréter ici et dans ce qui va suivre.

PROPOSITION Ire.

Si j'attends a, b *ou* c, *et que chacune de ces choses ou de ces quantités puisse m'échoir avec la même facilité, mon attente vaut* $\frac{a+b+c}{3}$.

Pour trouver cette règle, soit encore x la valeur de mon attente. Il faut donc qu'ayant x, je puisse, à jeu égal, parvenir à la même attente. Supposons que je joue avec Titius et Caïus aux conditions suivantes : chacun de nous dépose x ; si c'est Titius qui gagne le pari, il me donnera a, et je lui donnerai b, si c'est moi qui le gagne ; si c'est Caïus, il me donnera c, et je lui donnerai c, si c'est moi. Il est clair que ces conditions sont justes. Or, j'ai de cette manière la même probabilité d'obtenir b, c ou $3x-b-c$; car j'ai b, si Titius gagne le pari ; c, si Titius a l'avantage, et $3x-b-c$, si le sort m'est favorable, puisque, dans ce dernier cas, j'ai le dépôt $3x$, dont il faut que je donne b à Titius, et c à Caïus. Mais si $3x-b-c$ valait a, j'aurais le même droit d'attendre a, b ou c. Je fais donc $3x-b-c=a$, et j'ai $x=\frac{a+b+c}{3}$ pour la valeur de mon attente.

On trouve, de la même manière, que si mon sort est égal pour a, b, c, ou d, il vaut $\frac{a+b+c+d}{4}$; et ainsi de suite.

REMARQUES.

Voici comment on peut encore démontrer la même proposition. Imaginons qu'on ait caché a dans une boîte, b dans une autre, et c dans une troisième, et qu'il soit accordé à Titius, à Caïus et à moi de prendre chacun une de ces boîtes, et de garder ce qui s'y trouvera. Nous prendrons tous trois conjointement toutes les boîtes, et nous aurons ensemble tout ce qu'elles contiennent, c'est-à-dire, $a+b+c$; et comme on ne peut pas dire que l'espérance ou l'attente de l'un soit plus avantageuse que celle de l'autre, il s'ensuit que chacun de nous a le droit d'attendre le tiers de toute la somme, savoir, $\frac{a+b+c}{3}$. De même, s'il y a quatre boîtes où l'on ait caché a, b, c et d, et qu'il doive m'en échoir une, mon attente vaudra le quart de toute la somme, ou $\frac{a+b+c+d}{4}$; s'il y en a 5, elle vaudra $\frac{a+b+c+d+e}{5}$, etc.

Corollaire. Il est encore manifeste que s'il y a une ou plusieurs boîtes où il n'y ait rien de caché, mon attente vaudra, par la même raison, le tiers de ce qu'il y a dans le reste des boîtes, s'il y en a 3 en tout; le quart, s'il y en a 4; le cinquième, s'il y en a 5, etc.

PROPOSITION IIIe.

Si le nombre des cas où a *peut m'échoir est* p, *que le nombre de ceux où* b *peut m'échoir soit* q, *et que tous les cas puissent arriver avec une égale facilité, mon attente vaudra* $\frac{pa+qb}{p+q}$.

Pour découvrir cette règle, soit encore x la valeur de mon attente : il faut qu'ayant x, je puisse parvenir au même sort, en jouant à jeu égal. Pour cela, je prendrai avec moi autant de joueurs qu'il en faudra pour compléter le nombre $p+q$: chacun de nous déposera x, de sorte que le dépôt sera $px+qx$, et il faudra que chacun de nous ait le même espoir de gagner le pari. Je conviendrai avec chacun des joueurs qu'indique le nombre q, que si quelqu'un d'eux gagne, il me donnera b, et que je donnerai b à chacun d'eux, si le jeu me favorise. De même, je conviendrai avec chacun de mes p-1 autres adversaires que si quelqu'un d'entr'eux gagne, il me donnera a, que chacun d'eux recevra de moi, si c'est moi qui ai l'avantage. Il est évident que ces conditions sont justes, puisqu'elles ne font tort à aucun des joueurs. Il est encore clair que j'ai q chances pour b; que j'en ai $p-1$ pour a, et 1 pour $px+qx-bq-ap+a$; car j'ai une chance pour gagner, et, par conséquent, pour avoir le dépôt $px+qx$, dont je suis tenu de donner b à chacun des q joueurs, et a à chacun des $p-1$ autres, en tout, $bq+ap-a$. Si donc $px+qx-bq-ap+a$ était égal à a, j'aurais p chances pour a, puisque j'en avais déjà $p-1$, et j'en aurais q pour b; j'aurais donc alors mon premier sort. Ainsi je fais $px+qx-bq-ap+a=a$, et j'ai $x=\frac{ap+bq}{p+q}$ pour la valeur de mon attente.

En nombres. Si j'avais trois chances pour 13 et deux chances pour 8, mon sort vaudrait 11 d'après cette règle: et il est facile de faire voir que si j'ai 11, je pourrai encore avoir le même sort; et voici comment. Je jouerai contre quatre autres, et chacun de nous déposera 11 : Je conviendrai avec deux joueurs que si l'un ou l'autre gagne le pari, il me donnera 8, et que je donnerai 8 à chacun d'eux, si c'est moi qui le gagne. De même, je conviendrai avec les deux autres que celui d'entre eux que le hasard pourra favoriser, me donnera 13, et que chacun d'eux recevra 13 de moi, si j'ai l'avantage. Ces conditions sont justes, et il est clair que de cette manière j'ai deux chances pour 8, puisque les deux joueurs qui m'ont promis 8 ont chacun une chance pour gagner le pari; et trois chances pour 13, puisque les deux joueurs qui m'ont promis 13 ont aussi chacun une chance pour gagner, et que j'ai d'ailleurs une chance pour 13, ce qui est évident; car j'ai une chance pour gagner le pari, et alors j'ai le dépôt, c'est-à-dire 55, sur quoi je suis tenu de donner 13 à chacun de deux de mes adversaires, et 8 à chacun des deux autres, de sorte qu'il me reste 13.

REMARQUES.

Voici une autre démonstration de la même règle: Supposons un nombre de joueurs égal au nombre des cas en général, c'est-à-dire, à $p+q$, de manière qu'il y ait un cas pour chaque joueur; supposons, par exemple, qu'il y ait $p+q$ boîtes, et qu'on ait caché dans chacune ce que donne l'une des deux espèces de cas, savoir, a dans chacune des boîtes dont le nombre est p, et b dans chacune de celles dont le nombre est q. Si chacun des joueurs

reçoit une de ces boîtes, ils en recevront ensemble la totalité, et ils ne pourront manquer d'avoir conjointement tout ce qu'elles contiennent, savoir, $pa + qb$; et comme ils ont tous une attente égale, il faudra diviser ce qu'ils recevront ensemble, par le nombre des joueurs, ou par le nombre des cas : d'où il s'ensuit que l'attente de chacun vaudra $\frac{pa+qb}{p+q}$. On démontrera de la même manière que si j'ai p cas pour a, q pour b et r pour c, mon sort sera $\frac{pa+qb+rc}{p+q+r}$.

Corollaire I. De-là il résulte 1°. que si j'ai p cas pour avoir a, et q cas pour avoir o, mon attente vaudra $\frac{pa}{p+q}$.

2°. Il en résulte ensuite que, si les nombres des cas de diverses espèces ont un commun diviseur, la valeur de l'attente pourra se réduire à une plus simple expression; par exemple, si a peut m'échoir en mp cas, et b en mq, mon attente vaudra, d'après la règle, $\frac{mpa+mqb}{mp+mq}$ qui, par la division, se réduit à $\frac{pa+qb}{p+q}$.

3°. Si j'ai p cas pour a, q pour b, et r pour c; mon attente est la même que si, p et q étant réunis, j'avais $p+q$ cas pour $\frac{pa+qb}{p+q}$ et r cas pour c; car, dans l'une et l'autre hypothèse, la règle donne, pour la valeur de mon sort, $\frac{pa+qb+rc}{p+q+r}$.

4°. Si jai p cas pour a, q pour b et r pour rester dans l'état où je suis, c'est-à-dire, pour conserver mon sort actuel, ce sort sera $\frac{pa+qb}{p+q}$, précisément le même que si je n'avais aucun des cas dont le nombre est r. Car, soit x la valeur de mon sort

actuel, j'ai, par l'hypothèse, p cas pour a, q pour b; et r pour x, ce qui, selon la règle, vaut $\frac{pa+qb+rx}{p+q+r}$; et comme ce même sort a été nommé x, on a $x = \frac{pa+qb+rx}{p+q+r}$; ou, en multipliant par le diviseur du second membre, $px+qx+rx=pa+qb+rx$, et, en effaçant rx, $px+qx=pa+qb$, ou enfin, $x=\frac{pa+qb}{p+q}$.

5. Si j'ai p cas pour a, dont j'aye fourni la moitié; et q cas pour o, mon attente $\frac{pa}{p+q}$, telle que la donne le corollaire 1, se rapporte à tout le dépôt, de sorte que cette expression désigne la partie qui m'en est dûe; et non ce que je gagne ou ce que je perds seulement; car, s'il n'est question que du gain ou de la perte, je considère qu'en obtenant le dépôt a, je ne gagne que $\frac{1}{2}a$, et que si je n'en obtiens rien, je perds $\frac{1}{2}a$, ou que j'acquiers $-\frac{1}{2}a$: mon sort, pris en ce sens, devient donc $\frac{p\cdot\frac{1}{2}a+q\cdot-\frac{1}{2}a}{p+q} = \frac{(p-q)\frac{1}{2}a}{p+q}$, et cette expression désigne le gain, si p est plus grand que q, et la perte, si q est plus grand que p.

6. Si j'ai p cas pour acquérir a, et q cas pour acquérir b, sans que j'aye rien fourni de ces deux quantités, et que, cependant, je sois tenu de donner n pour l'avantage que je reçois, mon attente $\frac{pa+qb}{p+q}$ ne doit pas être totalement comptée pour gain, mais il faut en déduire la valeur n; car, quand je donne n à celui qui me rend a ou b, je suis au même état que si, sans rien donner, je recevais seulement

lement $a - n$ ou $b - n$, ce qui restreint mon attente à $\frac{p.\overline{a-n}+q.\overline{b-n}}{p+q} = \frac{pa+qb}{p+q} - n$, expression qui marque le gain et la perte, selon que la partie affirmative l'emporte sur la négative, ou la négative sur l'affirmative.

Scholie. En examinant ce calcul, on voit qu'il a une grande affinité avec la règle connue en arithmétique sous le nom. de règle d'alliage, qui consiste à trouver le prix d'un mixte composé de quantités données de chacune de plusieurs choses de différens prix; ou plutôt on voit que le calcul est absolument le même de part et d'autre. Car, comme la somme des produits des quantités des choses mélangées, par leurs prix respectifs, divisée par la somme de ces quantités, donne le prix cherché, qui est toujours entre le plus fort et le plus faible: de même, la somme des produits des nombres des cas divers, par les avantages respectifs qu'ils apportent, divisée par la somme de tous les cas en général, donne la valeur de l'attente, qui, par conséquent, est toujours intermédiaire entre le plus grand et le plus petit de ces avantages: si donc on prend les mêmes nombres pour exprimer, d'un côté, les quantités des choses mélangées et leurs prix, de l'autre, les cas divers et ce qu'ils donnent respectivement, le même nombre désignera aussi le prix du mélange et la valeur de l'attente. Par exemple, si l'on a mêlé 3 pintes de vin à 13 sous, avec 2 pintes de vin à 8 sous, multipliez 3 par 13, et 2 par 8, vous aurez 55 pour le prix de toutes les pintes; divisez par 5 nombre des pintes, et le quotient 11 sera le prix d'une pinte du mélange. Telle est aussi, d'après la règle, la valeur de l'attente de celui qui aurait 3 cas pour 13, et 2 cas pour 8.

PROPOSITION IVe.

Supposons maintenant que je joue avec quelqu'un, à condition que le dépôt doive appartenir à celui qui le premier aura eu trois fois l'avantage, que je l'aye eu déjà deux fois et mon adversaire une fois seulement: si nous ne voulons pas continuer de jouer, mais bien partager l'argent du jeu dans une juste proportion, je demande quelle part je dois en prétendre.

Pour en venir à la question qui a été proposée d'abord, et qui consiste à déterminer les parts de divers joueurs, dont les sorts sont inégaux, il faut commencer par ce qu'il y a de plus facile.

A Premièrement on doit considérer les jeux qui manquent à chaçun des joueurs; car il est certain que si, par exemple, il est convenu entre quelqu'un et moi que le dépôt sera à celui qui le premier aura eu vingt fois l'avantage, que je l'aye eu dix-neuf fois, et mon adversaire dix-huit fois, mon sort l'emportera autant sur le sien que dans l'espèce dont il s'agit, où sur trois jeux j'en ai marqué deux et mon adversaire un seul; car, dans l'une et l'autre espèce, il ne me manque qu'un jeu, tandis qu'il en manque deux à mon adversaire.

Pour trouver ensuite combien il nous revient à chacun, il faut examiner ce qui arriverait, si nous achevions la partie. Il est certain que si je gagnais le premier jeu, je compléterais le nombre prescrit,
B et que j'aurais tout le dépôt que j'appellerai a; mais si mon adversaire le gagnait, son sort serait égal au mien, puisqu'il manquerait un jeu de part et d'autre, et chacun aurait $\frac{1}{2}a$. Or, il est manifeste

que j'ai la même facilité pour gagner ou pour perdre le premier jeu, de sorte que mon attente est égale pour a et pour $\frac{1}{2}a$, ce qui, par la première proposition, me vaut la moitié de a et de $\frac{1}{2}a$, c'est-à-dire, $\frac{3}{4}a$: il reste à mon adversaire $\frac{1}{4}a$, ce C
qu'on aurait pu trouver directement de la même ma- D
nière. On voit donc que si quelqu'un voulait me remplacer, il faudrait qu'il me donnât $\frac{3}{4}a$ pour me dédommager; et qu'ainsi celui qui parierait de marquer un jeu, avant qu'un autre en eût marqué deux, E
devrait toujours mettre trois contre un.

REMARQUES.

Premièrement on doit considérer les jeux qui manquent A
à chacun des joueurs). Ainsi, en calculant les sorts, on ne doit avoir aucun égard aux jeux précédens, mais seulement aux suivans; puisqu'il n'y a aucun de ceux-ci pour lequel on puisse dire que la fortune favorisera plus probablement ceux à qui elle a déjà été favorable, que ceux à qui elle a été le plus contraire : ce qu'il faut observer contre l'opinion ridicule de beaucoup de gens qui regardent la fortune comme une sorte de faveur qui s'attache à l'homme pour quelque temps, et lui donne, en quelque façon, le droit d'espérer un bonheur suivi.

Que j'appellerai a.) Par la lettre a, il faut entendre B
non-seulement, avec l'auteur, l'argent déposé, qui peut se partager entre les joueurs, à raison des sorts, mais encore tout ce qui, quoiqu'indivis en soi, peut néanmoins se concevoir comme divisible, selon le nombre des cas où la chose peut se gagner ou se perdre, se faire ou ne se pas faire, etc., ainsi que nous le mon-

trerons plus amplement dans la dernière partie de cet ouvrage ; par exemple, un prix quelconque, une palme, une victoire, l'état ou la condition d'une personne, un office public, un ouvrage entrepris, la vie ou la mort, etc. Ainsi, quand, par une grâce spéciale du prince, deux malfaiteurs tirent la vie au sort, à chances égales, chacun d'eux est censé avoir $\frac{1}{2}$ de vie et $\frac{1}{2}$ de mort, de sorte qu'on peut dire rigoureusement, qu'en pareil cas un homme est à demi vivant et à demi mort.

C *Il reste pour mon adversaire* $\frac{1}{4}$ a). C'est-à-dire, le reste du dépôt a, parce qu'à la fin du jeu, nous aurons infailliblement ensemble la totalité de a ; mais s'il peut arriver, en quelqu'occurence, que deux joueurs ayent à prétendre conjointement plus ou moins de a, il est évident qu'alors l'attente de l'un ne peut être le complément de celle de l'autre par rapport à a. Par exemple, si deux hommes, dignes du dernier supplice, sont tenus de jeter un dé, à condition que celui qui amènera le moins de points subira sa peine, que celui qui en amènera le plus, conservera la vie, et qu'ils la conserveront tous deux s'ils en amènent le même nombre, on trouvera pour l'attente de l'un $\frac{7}{12}a$ ou $\frac{7}{12}$ de vie, comme on le verra en son lieu ; mais il ne faut pas en conclure que l'attente de l'autre ne soit que $\frac{5}{12}$ de vie : car, comme il est évident qu'ici les sorts sont égaux, l'autre aura aussi droit d'en attendre $\frac{7}{12}$, ce qui donne pour les deux $\frac{7}{6}$ de vie, c'est-à-dire, plus que la totalité. La raison en est, qu'il n'y a aucun cas où la fortune du jeu ne laisse la vie a l'un ou à l'autre, et qu'il y en a quelques-uns où ils peuvent la conserver tous deux.

(Ce qu'on aurait pu trouver directement, etc.) Voici D comment : Si mon adversaire gagne le prochain jeu, son sort et le mien seront égaux, et partant nous aurons chacun $\frac{1}{2} a$; mais si je le gagne, il n'aura rien. Donc, puisqu'il peut, avec la même facilité, avoir $\frac{1}{2} a$ ou o, la valeur de son attente est $\frac{1}{4} a$, par le coroll. 1. de la prop. III.

Devrait toujours mettre trois contre un.) Il faut dé- E montrer que celui qui a trois cas pour gagner et un pour perdre, ou qui attend les trois quarts du dépôt, peut parier trois contre un : il suffit pour cela de le supposer substitué à trois joueurs ; car s'il y en a quatre qui jouent à chances égales, et qui déposent chacun 1, chaque joueur aura le droit d'attendre précisément ce qu'il aura mis au jeu, c'est-à-dire, le quart de tout le dépôt, par le coroll. 2. de la prop. III ; et partant trois quelconques d'entre eux en pourront prétendre les trois quarts, et le quatrième un quart ; mais comme ces trois joueurs ont aussi déposé trois, tandis que le quatrième n'a déposé qu'un, il est évidemment de toute justice que celui qui veut en remplacer trois, c'est-à-dire, avoir trois fois autant à attendre qu'un seul, soit aussi tenu de déposer le triple : c'est ce qu'on peut aussi démontrer de la manière suivante. Celui qui a trois cas pour réussir, et un cas pour manquer, peut avoir autant de fois trois avantages que son adversaire un seul ; il faut donc, pour que le jeu soit juste, qu'en trois coups le premier ait précisément autant de profit que l'autre en un, ce qui ne peut se faire, à moins qu'il ne dépose trois contre un ; et c'est ainsi qu'on démontre en général que plus l'attente d'un joueur est préférable à celle de

REMARQUES.

De-là il s'ensuit évidemment, etc.) De même, si *A* joue pour trois points et B pour six, le sort de *A* est encore plus avantageux ; car il se trouve valoir $\frac{219}{256}a$, qui est plus grand que $\frac{13}{16}a$. Semblablement, si *A* joue pour un point et *B* pour quatre, le sort de *A* n'est pas le même que s'il jouait pour deux points et *B* pour huit; mais il est le même que s'il jouait pour deux points et *B* pour six ; et cependant, il n'est peut-être personne qui ne se persuadât que les sorts doivent être les mêmes, lorsque les jeux qui manquent de part et d'autre sont en même raison, si le calcul ne nous eût fait connaître le contraire. Nous devons apprendre par-là à être circonspects dans nos jugemens, et à ne pas fonder nos raisonnemens sur la première analogie qui se présente; ce qui pourtant n'est que trop ordinaire à ceux mêmes qui passent pour les plus éclairés.

Au reste, je joindrai ici une table pour deux joueurs, à l'exemple de celle que l'auteur donne pour trois, et qu'on trouvera à la suite de la proposition IX[e].

TABLE POUR DEUX JOUEURS.

Sorts du Joueur A.

Jeux qui manquent au joueur A.	Jeux qui manquent au joueur B. 1	2	3	4	5	6	7
1	1 : 2	3 : 4	7 : 8	15 : 16	31 : 32	63 : 64	127 : 128
2	1 : 4	4 : 8	11 : 16	26 : 32	57 : 64	120 : 128	247 : 256
3	1 : 8	5 : 16	16 : 32	42 : 64	99 : 128	219 : 256	466 : 512
4	1 : 16	6 : 32	22 : 64	64 : 128	163 : 256	382 : 512	848 : 1024
5	1 : 32	7 : 64	29 : 128	93 : 256	256 : 512	638 : 1024	1486 : 2048
6	1 : 64	8 : 128	37 : 256	130 : 512	386 : 1024	1024 : 2048	2510 : 4096
7	1 : 128	9 : 256	46 : 512	176 : 1024	562 : 2048	1586 : 4096	4096 : 8192
8	1 : 256	10 : 512	56 : 1024	232 : 2048	794 : 4096	2380 : 8192	6476 : 16384
9	1 : 512	11 : 1024	67 : 2048	299 : 4096	1093 : 8192	3473 : 16384	9949 : 32768

Il est très-aisé de donner à cette table toute l'étendue dont on aura besoin. On la continue dans la 1.re série transversale, d'après ce qui a été remarqué sur la proposition V.e ; dans la 1.re série perpendiculaire, par la division continuelle de $\frac{1}{2}$ par 2 ; et dans les endroits intermédiaires, en prenant la moitié de la somme des deux cases qui précèdent immédiatement dans la même série perpendiculaire et transversale. La raison de cette construction sort évidemment de ce qui a été dit. Au surplus, nous ferons voir, dans l'appendice du chapitre IV, II.e partie, comment on peut déterminer, en général et indépendamment de la table, les sorts de deux joueurs, quels que soient les nombres des jeux qui leur manquent.

PROPOSITION VIIIe.

Supposons à présent qu'il y ait trois joueurs, et qu'il manque un jeu, tant au premier qu'au second, mais qu'il en manque deux au troisième.

Pour trouver le sort du premier, il faut encore examiner quelle part lui serait dûe si c'était lui, ou l'un des deux autres qui gagnât le jeu prochain. Si c'était lui, il aurait le dépôt que j'appelle a; si c'était le second, le premier n'aurait rien, car la partie serait finie : mais si c'était le troisième, alors il manquerait encore un jeu à chacun des trois joueurs, et partant il serait dû $\frac{1}{3}$ a, tant au premier qu'à chacun des deux autres. Et comme chacun des trois peut, avec une égale facilité, gagner le jeu prochain, le premier a une chance pour a, une pour o et une pour $\frac{1}{3}$ a, ce qui lui vaut $\frac{4}{9}$ a, par la IIe. proposition; le second a également $\frac{4}{9}$ a, et il reste au G troisième, $\frac{1}{9}a$, part qu'on aurait pu trouver aussi séparément, et d'après laquelleon aurait déterminé celles des deux autres.

REMARQUE.

G *Part qu'on aurait pu trouver séparément*) Voici de quelle manière : si c'était lui qui gagnât le jeu prochain, son attente vaudrait $\frac{1}{3}$ a; mais si c'était le premier ou le second, le troisième n'aurait rien : ainsi il a un cas pour $\frac{1}{3}$ a, et deux cas pour o, ce qui lui vaut $\frac{1}{9}$ a, par le 1. coroll. de la prop. III.

PROPOSITION IXe.

Pour trouver la part de l'un quelconque d'autant de joueurs qu'on voudra, auxquels il manque divers nombres de jeux, il faut examiner combien il serait dû à celui dont on veut trouver la part, si c'était lui, ou l'un des autres consécutivement, qui gagnât le jeu prochain. Si l'on ajoute ensemble ces valeurs et qu'on divise la somme par le nombre des joueurs, le quotient donnera la part cherchée.

Soient trois joueurs *A*, *B* et *C*, et supposons qu'il manque un jeu à *A*, deux à *B* et deux à *C*: il s'agit de trouver ce que *B* a le droit de prétendre dans le dépôt que j'appelle *q*.

Il faut examiner d'abord quel serait le sort de *B*, si c'était lui, ou *A* ou *C* qui gagnât le premier des jeux suivans.

Si c'était *A*, la partie serait finie, et, par conséquent, il serait dû *o* à *B*; si c'était *B*, il lui manquerait encore un jeu, il en manquerait un à *A* et deux à *C*; et partant, il serait dû à *B*, $\frac{4}{9}$ *q*, par la VIIIe. proposition: enfin, si c'était *C*, il manquerait un jeu tant à *A* qu'à *C*, et deux à *B*, et, par conséquent, il serait dû à *B* $\frac{1}{9}$ *q*, par la même proposition VIIIe. Maintenant il faut ajouter ensemble les valeurs qui seraient dûes à *B* dans ces trois hypothèses; savoir, *o*, $\frac{4}{9}$ *q*, $\frac{1}{9}$ *q*, dont la somme est $\frac{5}{9}$ *q*, qui, divisée par 3, nombre des joueurs, donne $\frac{5}{27}$ *q*: telle est la part cherchée. Il est facile de le démontrer d'après la seconde proposition; car, puisque *B* a la même probabilité pour *o*, $\frac{4}{9}$ *q* et $\frac{1}{9}$ *q*, il a,

par la IIe. proposition, $\frac{0+\frac{4}{9}q+\frac{1}{9}q}{3}$, c'est-à-dire $\frac{5}{27}q$. Et il est certain que ce diviseur 3 est le nombre des joueurs.

Or, pour trouver l'attente de l'un quelconque des joueurs dans chaque hypothèse, c'est-à-dire, en supposant que ce soit lui ou quelqu'un des autres qui gagne le jeu prochain, il faut chercher d'abord la solution des cas les plus simples, et par leur moyen celle des suivans; car comme on n'aurait pu résoudre le cas qui vient d'être proposé, avant d'avoir soumis au calcul celui de la proposition VIIIe., où les jeux manquans étaient 1, 1, 2, de même aussi l'on ne peut supputer la part de l'un quelconque des joueurs, dans le cas où les jeux manquans sont 1, 2, 3, qu'on n'ait soumis au calcul celui où les jeux manquans sont 1, 2, 2, comme nous l'avons déjà fait, et de plus celui où les jeux manquans sont 1, 1, 3, qu'on aurait pu calculer également par la proposition VIIIe. Et c'est ainsi qu'on peut calculer successivement tous les cas compris dans la table suivante, et une infinité d'autres.

TABLE
POUR TROIS JOUEURS.

Jeux qui leur manquent.	1. 1. 2.	1. 2. 2.	1. 1. 3.	1. 2. 3.		
Leurs parts.	4. 4. 1.	17. 5. 5.	13. 13. 1.	19. 6. 2.		
	9.	27.	27.	27.		
Jeux qui leur manquent.	1. 1. 4.	1. 1. 5.	1. 2. 4.	1. 2. 5.		
Leurs parts.	40. 40. 1.	121. 121. 1.	178. 58. 7.	542. 179. 8.		
	81.	243.	243.	729.		
Jeux qui leur manquent.	1. 3. 3.	1. 3. 4.	1. 3. 5.			
Leurs parts.	65. 8. 8.	616. 82. 31.	629. 87. 13.			
	81.	729.	729.			
Jeux qui leur manquent.	2. 2. 3.	2. 2. 4.	2. 2. 5.	2. 3. 3.	2. 3. 4.	2. 3. 5.
Leurs parts.	34. 34. 13.	338. 338. 53.	353. 353. 23.	133. 55. 55.	451. 195. 83.	1433. 635. 119.
	81	729	729	243	729	2187

DES DÉS.

En ce qui concerne les dés on peut proposer les questions suivantes ; savoir : en combien de jets on peut parier d'amener un 6 ou quelqu'un des autres points avec un dé, deux 6 avec deux dés, ou trois 6 avec trois dés ; et beaucoup d'autres questions semblables.

Pour les résoudre, voici ce qu'il faut considérer. D'abord, il y a pour un dé six coups différens, qui peuvent arriver avec une égale facilité, car je suppose le dé d'une figure parfaitement cubique. Pour deux dés il y a 36 différens coups, encore également probables ; car chaque coup de l'un des dés peut se rencontrer avec chacun des six coups de l'autre, et six fois 6 font 36 coups. Pour trois dés, il y a 216 coups différens ; car, avec chacun des 36 coups de deux dés, peut se rencontrer chacun des 6 coups d'un troisième dé, et six fois 36 font 216 coups. On voit également qu'il y a six fois 216, c'est-à-dire, 1296 coups pour quatre dés : c'est ainsi qu'on peut calculer, de proche en proche, combien il y a de coups pour un nombre quelconque de dés, en sextuplant le nombre des coups qu'il y avait pour un dé de moins.

Au surplus, il faut remarquer qu'avec deux dés il n'y a qu'un coup pour 2 ou 12 points, mais qu'il y en a deux pour 3 ou 11 ; car, si nous appelons les dés *A* et *B*, il est clair qu'on peut avoir 1 point en *A* et deux en *B*, ou un en *B* et deux en *A*, et qu'ainsi il y a deux manières d'avoir 3 points. De même, on peut avoir 5 points en *A* et 6 en *B*, ou 6

en *A* et 5 en *B*, ce qui donne deux manières d'avoir 11 points. Il y a trois coups pour 4 points, car on peut avoir 1 point en *A* et 3 en *B*, ou 3 en *A* et et 1 en *B*, ou 2 en *A* et 2 en *B*.

Il y a pareillement trois coups pour 10 points;
Quatre coups pour 5 ou 9 points,
Cinq coups pour 6 ou 8 points,
Six coups pour 7 points.

Avec trois dés on a	coups pour	points.
1		3 ou 18
3		4 ou 17
6		5 ou 16
10		6 ou 15
15		7 ou 14
21		8 ou 13
25		9 ou 12
27		10 ou 11

REMARQUES.

Ce que l'auteur a fait ici pour deux et trois dés est encore possible, si l'on en suppose quatre, cinq ou un plus grand nombre, à l'égard desquels on déterminera de même combien il y aura de coups pour un nombre quelconque de points; mais comme il est facile, sur-tout lorsqu'il y a beaucoup de dés, d'omettre un grand nombre de coups, si la recherche ne s'en fait avec un certain ordre, je vais faire connaître la méthode qu'on doit suivre pour être sûr de les avoir trouvés tous, sans aucune omission. D'abord il faut chercher en combien de manières on peut composer le nombre de points proposé d'autant de parties qu'il y a de dés, de sorte qu'aucune de ces parties n'excède le nombre 6; ensuite il faut examiner combien de coups répondent à chacune de ces manières: mais c'est ce qu'on apprendra mieux par

des exemples que par des règles. Supposons donc qu'il soit question de savoir combien il y a de coups pour 12 points avec quatre dés.

Pour le trouver, je commence par quatre unités, en écrivant 1. 1. 1. 1, puis j'augmente la première par une addition graduelle d'unités jusqu'à 6, ce qui donne 6. 1. 1. 1; mais comme la somme de ces nombres n'égale pas encore le nombre proposé 12, je porte encore la seconde partie jusqu'à 2, jusqu'à 3, en écrivant 2. 2. 1. 1, ensuite 3. 3. 1. 1, et à chaque fois j'augmente le premier nombre jusqu'à 6, pour avoir 6. 2. 1. 1, 6. 3. 1. 1, dont les sommes sont encore au-dessous du nombre proposé: je continue donc et j'écris 4. 4. 1. 1, et en portant à 6 le premier nombre, j'ai 6. 4. 1. 1, dont la somme est égale à 12; ainsi je les mets à part: ensuite j'écris 5. 5. 1. 1, qui font également 12 et que je réserve encore. Mais comme 6. 5. 1. 1, de même que 6. 6. 1. 1, excèdent 12, je les néglige, et je porte à 2 la troisième unité à laquelle je n'avais pas encore touché, en écrivant 2. 2. 2. 1; et parce qu'en augmentant jusqu'à 6 le premier de ces nombres, ce qui donne 6. 2. 2. 1, j'ai encore une somme au-dessous de 12, je passe à 3. 3. 2. 1 et j'augmente encore la première partie comme auparavant, pour avoir 6. 3. 2. 1 qui font exactement 12, et que je mets à part pour cette raison: ensuite je n'ai qu'à ajouter une unité à la seconde partie en l'ôtant à la première, pour avoir 5. 4. 2. 1 qui sont encore à noter. Mais je ne continue pas d'augmenter la seconde partie; car si je l'élevais soit jusqu'à 5, soit jusqu'à 6, il faudrait, pour avoir exactement 12, abaisser la première soit jusqu'à quatre, soit jusqu'à trois, ce qui ferait reparaître quelques-uns des modes précédens; et il faut toujours prendre garde

à

à ce qu'aucune des parties qui précèdent ne soit plus petite que quelqu'une de celles qui suivent. Je passe donc sur-le-champ à 3. 3. 3. 1 ; je fais un 5 du premier 3, et j'ai 5. 3. 3. 1 qui constitue la somme proposée : puis, en élevant la seconde partie et en abaissant la première jusqu'à 4, j'obtiens les nombres 4. 4. 3. 1, qui satisfont encore à la question. Mais comme il est manifeste qu'aucune des deux premières parties, ni même la troisième, ne peuvent être augmentées d'une unité que la somme des quatre ne passe 12, ou que quelqu'une de celles qui précèdent ne devienne plus petite que quelqu'une de celles qui suivent, ce qui ferait reparaître quelques-uns des modes précédens, je commence à faire varier la quatrième partie, à laquelle je n'ai pas encore touché, et je la porte à 2. J'ai donc 2. 2. 2. 2 ; le premier nombre étant augmenté jusqu'à 6, il vient 6. 2. 2. 2, nouveau mode qui remplit la condition. Alors j'augmente la seconde partie et je diminue la première d'abord d'une, puis de deux unités, et j'ai deux autres modes satisfaisans 5. 3. 2. 2, et 4. 4. 2. 2 : et comme on ne peut y augmenter aucune des deux premières parties que l'autre ne soit diminuée, ce qui ferait reparaître les anciens modes, ou que la somme totale n'excède 12, je passe à 3. 3. 3. 2, ou, en augmentant le premier nombre d'une unité, à 4. 3. 3. 2, nouveau mode qui donne le nombre proposé. Enfin, comme il n'est plus possible, par la même raison, d'augmenter aucune des trois premières parties, il faut porter la dernière jusqu'à 3, et écrire 3. 3. 3. 3, dont la somme est encore égale à 12. Alors il n'est pas possible d'aller plus loin, puisqu'on ne peut augmenter le dernier terme sans diminuer quelqu'un des premiers, et par conséquent sans reproduire un des modes précédens. Ainsi, il est

constant que, pour composer le nombre 12 de quatre autres nombres dont aucun ne passe 6, il n'y a point d'autres modes que ceux qui viennent d'être notés et que nous allons insérer au tableau suivant dans l'ordre où ils se sont présentés.

MODES.	COUPS
6.4.1.1.	12
5.5.1.1.	6
6.3.2.1.	24
5.4.2.1.	24
5.3.3.1.	12
4.4.3.1.	12
6.2.2.2.	4
5.3.2.2.	12
4.4.2.2.	6
4.3.3.2.	12
3.3.3.3.	1
Somme des coups........	125

On trouvera, par la même méthode, toutes les manières possibles d'avoir un nombre de points quelconque, avec autant de dés qu'on voudra, pourvu qu'on ait l'attention de porter les points du premier dé jusqu'à 6, par une addition graduelle d'unités, avant d'augmenter ceux du second d'une seule unité; d'élever de même jusqu'à 6 les points du second, avant d'ajouter une unité aux points du troisième ; d'augmenter de la même manière les points du troisième avant ceux du quatrième, ceux du quatrième avant ceux du cinquième, et ainsi de suite.

Cette opération terminée, il en reste une autre qui consiste à trouver combien il y a de coups pour chacun de ces modes ; car il peut y en avoir plusieurs, ce qui dépend de ce que tel ou tel nombre est donné par tel ou tel dé. Par exemple, s'il y a quatre dés qui soient *A*, *B*, *C* et *D*, et qu'il soit question de savoir combien il y a de coups pour le mode 6. 4. 1. 1., il est clair qu'on peut avoir 6 points en *A* et 4 en *B*, *C* ou *D*, ou 6 en *B* et 4 en *A*, *C* ou *D*, etc., ce qui donne autant de coups que ces nombres peuvent avoir d'arrangemens différens. Il en est de même des autres modes. Or, il peut y

avoir 12 arrangemens divers pour les nombres 6. 4. 1. 1., dont deux sont différens, tandis que les deux autres sont les mêmes : il ne peut y en avoir que 6 pour les suivans, 5. 5. 1. 1., dont les deux premiers sont les mêmes, ainsi que les deux derniers; mais il peut y en avoir 24 pour ceux qui viennent ensuite, 6. 3. 2. 1., qui diffèrent tous entre eux: c'est ce qui demeurera constant par la théorie des permutations et des combinaisons que j'ai entrepris d'exposer dans la seconde partie. Ces arrangemens, avec ceux qui répondent aux autres modes, s'élèvent ensemble à 125 nombres des coups qu'il y a pour 12 points avec quatre dés: ce qu'il fallait trouver.

Mais, comme cette méthode de calcul est excessivement ennuyeuse et prolixe, je vais faire voir par quel art on peut parvenir au même but, non-seulement pour un nombre de points déterminé, mais pour tous ceux que peut donner un nombre quelconque de dés. Il suffira de consulter la table ci-jointe, qui peut se construire d'une manière très-expéditive, et qui démontre aux yeux la nature des nombres cherchés, et la loi qu'ils suivent entre eux. En voici la construction : écrivez de suite, depuis le plus petit jusqu'au plus grand, les nombres de tous les points que les dés peuvent donner; écrivez, par exemple, 4. 5. 6. 7., etc., jusqu'à 24, s'il y a quatre dés; 5. 6. 7. 8., etc., jusqu'à 30, s'il y en a cinq, etc. : sous les six premiers placez six unités; sous celles-ci placez-en encore six, sous lesquelles vous en écrirez encore six, ce que vous continuerez jusqu'à six fois, en observant d'avancer à chaque fois la première unité de chaque rang d'un degré vers la droite; alors, ajoutez ensemble celles qui se répondent dans la même ligne

E 2

verticale, pour avoir les nombres 1.2.3.4., etc. Formez de même six rangs de ces derniers nombres, de manière que chacun des nombres de chaque rang se trouve d'un degré plus avancé vers la droite que le nombre correspondant du rang précédent; puis faites l'addition pour avoir les nombres 1. 3. 6. 10., etc.: posez encore six fois ceux-ci, en observant la même gradation, et additionnez; continuez ainsi jusqu'à ce que la dernière addition donne autant de sommes que le nombre de dés proposé donne de points différens, et ces sommes exprimeront respectivement les nombres des coups qu'il y aura pour les points correspondans. Ainsi, avec quatre dés il y aura un coup pour 4 ou 24 points, quatre pour 5 ou pour 23, dix pour 6 ou pour 22, vingt pour 7 ou pour 21, etc. La raison de cette construction est facile à appercevoir; car, comme avec un dé de plus on a six fois autant de coups qu'il y en avait pour le nombre de dés précédent, on voit évidemment pourquoi il faut répéter six fois, et additionner les nombres des coups qu'on avait avec ce nombre de dés; et comme les nombres de points qui répondent à ces divers coups de dés, se trouvent augmentés d'une, de deux ou de trois, etc. unités, selon que le nouveau donne 1. 2. 3., etc. points on voit également pourquoi cette suite de coups de dés doit s'avancer à chaque fois d'un degré vers la droite, puisqu'à chaque nombre de coups doit répondre un nombre de points plus grand d'une unité que dans la suite précédente]

Pour la page 36.

18.						
19.	20.	21.	22.	23.	24.	
20.	21.	22.	23.	24.	25.	etc.
21.	22.	23.	24.	25.	26.	etc.

Observez qu'on n'a pas pu marquer tous les nombres de coups que peuvent donner cinq et six dés, à cause du défaut d'espace ; mais il est facile de suppléer à ceux qui manquent par leurs parallèles : j'appelle ainsi les nombres de points également éloignés des deux extrêmes, et pour lesquels il y a toujours un même nombre de coups.

Il est quelquefois bon de savoir, et il n'est pas hors du sujet de faire connaître ici en combien de jets on peut amener avec trois dés des points triples ou doubles, qu'on appelle *rafles* et *doublets*, c'est-à-dire, combien de fois il peut arriver que les trois dés ou deux seulement donnent le même nombre de points. Or, il est clair qu'il n'y a qu'un coup pour les trois six, un coup pour les trois cinq, un coup pour les trois quatre, etc., et qu'ainsi il n'y a que six coups pour une rafle. Mais il y a quinze coups pour deux six, par exemple ; car si l'on appelle les dés *A*, *B* et *C*, il peut arriver que ces deux six soient donnés par *A* et *B*, ou par *A* et *C*, ou par *B* et *C*, ce qui fait trois cas ; mais, à raison de chacun de ces cas, le jet du troisième dé, qui doit présenter un nombre de points différent, peut varier cinq fois : il y a donc cinq fois trois ou quinze coups pour deux six ; et comme le même raisonnement a lieu pour deux cinq, pour deux quatre, etc., il s'ensuit qu'il y a six fois quinze ou 90 coups pour un doublet : d'où il résulte que les trois dés donnant en tout 216 coups, il y a 120 coups simples, ce qu'on aurait encore pu trouver directement.

verticale, pour avoir les nombres 1.2.3.4., etc. Formez de même six rangs de ces derniers nombres, de manière que chacun des nombres de chaque rang se trouve d'un degré plus avancé vers la droite que le nombre correspondant du rang précédent; puis faites l'addition pour avoir les nombres 1. 3. 6. 10., etc.: posez encore six fois ceux-ci, en observant la même gradation, et additionnez; continuez ainsi jusqu'à ce que la dernière addition donne autant de sommes que le nombre de dés proposé donne de points différens, et ces sommes exprimeront respectivement les nombres des coups qu'il y aura pour les points correspondans. Ainsi, avec quatre dés il y aura un coup pour 4 ou 24 points, quatre pour 5 ou pour 23, dix pour 6 ou pour 22, vingt pour 7 ou pour 21, etc. La raison de cette construction est facile à appercevoir; car, comme avec un dé de plus on a six fois autant de coups qu'il y en avait pour le nombre de dés précédent, on voit évidemment pourquoi il faut répéter six fois, et additionner les nombres des coups qu'on avait avec ce nombre de dés; et comme les nombres de points qui répondent à ces divers coups de dés, se trouvent augmentés d'une, de deux ou de trois, etc. unités, selon que le nouveau donne 1. 2. 3., etc. points on voit également pourquoi cette suite de coups de dés doit s'avancer à chaque fois d'un degré vers la droite, puisqu'à chaque nombre de coups doit répondre un nombre de points plus grand d'une unité que dans la suite précédente]

Pour la page 36.

18.						
19.	20.	21.	22.	23.	24.	
20.	21.	22.	23.	24.	25.	etc.
21.	22.	23.	24.	25.	26.	etc.

PROPOSITION X[e].

Trouver en combien de jets on peut parier d'amener six points avec un seul dé.

Qu'un joueur parie d'amener le six au premier jet, on voit qu'il a un cas pour gagner et pour avoir l'argent du jeu, mais qu'il a cinq cas pour perdre et pour ne rien avoir; car il y a cinq coups de dé contre lui, et il n'y en a qu'un en sa faveur. Soit a le dépôt ou l'argent du jeu. Il a une chance pour a et cinq pour o, ce qui, par la seconde proposition, vaut $\frac{1}{6}a$; et il reste pour son adversaire $\frac{5}{6}a$. Ainsi on ne peut parier que 1 contre 5 d'amener le six au premier jet.

Si un joueur parie d'amener une fois le six en deux jets, son sort se calcule comme il suit. S'il amène six au premier jet, il obtient a; s'il amène un autre point, il lui reste un seul jet, qui, comme on le vient de voir, vaut $\frac{1}{6}a$. Or, il n'a qu'un cas pour avoir le six au premier jet, et il en a cinq pour avoir un autre point. Donc, au commencement du jeu, il a un cas pour a et cinq pour $\frac{1}{6}a$, ce qui, par la seconde proposition, vaut $\frac{11}{36}a$. Ainsi il reste pour son adversaire $\frac{25}{36}a$; de sorte que le sort de l'un, ou la valeur de son attente, est au sort de l'autre, dans la raison de 11 à 25, plus faible que celle de 1 à 2.

De-là l'on trouve, par un calcul semblable, que le sort de celui qui parie d'amener une fois le six en trois jets, vaut $\frac{91}{216}a$; de sorte qu'il peut parier 91 contre 125, c'est-à-dire, un peu moins de 3 contre 4.

Celui qui entreprend d'amener le six une fois en quatre jets a pour sort $\frac{671}{1296}a$; de sorte qu'il peut parier 671 contre 625, c'est-à-dire, plus de 1 contre 1. H

Celui qui parie de l'amener en cinq jets a pour sort $\frac{4651}{7776}a$, et peut déposer 4651 contre 3125, c'est-à-dire, un peu moins de 3 contre 2.

Celui qui entreprend de l'amener en six jets a pour sort $\frac{31031}{46656}a$, et peut déposer 31031 contre 15625, c'est-à-dire, un peu moins de 2 contre 1.

On peut continuer ainsi le calcul jusqu'à un nombre quelconque de jets; mais on verra dans la proposition suivante qu'il y a un moyen de l'abréger, sans quoi il serait beaucoup trop prolixe.

REMARQUES.

Celui qui entreprend d'amener le six une fois en quatre jets, etc.). Il m'est quelquefois venu à l'esprit que quelqu'un pourrait peut-être rendre suspect le calcul de l'auteur, en raisonnant de la manière suivante : si celui qui parie d'amener le six en quatre jets, a à peu près la même attente de gagner ou de perdre, c'est-à-dire, peut gagner ou perdre avec la même facilité, il arrivera qu'après avoir joué pendant quelque temps, il aura autant de fois gagné que perdu, si le hasard n'est pas contre lui ; de sorte qu'il se trouvera autant de fois quatre jets qui lui auront donné le six, qu'il s'en trouvera de fois quatre qui lui auront donné un autre point : il y aura donc un six en 8 jets, et partant six cents jets, par exemple, donneront 75 six. Supposons maintenant que six autres joueurs jettent le dé, à condition que le premier gagnera, s'il amène l'as ; le second, s'il amène le deux ; le troisième, H

s'il amène le trois, etc. Il est certain que, par la nature du jeu, leurs sorts seront égaux ; et s'ils jouent aussi à fortune égale, il en résultera nécessairement que six cents jets donneront 100 six. Donc, en jouant à jeu égal, et avec une fortune égale, on a cent fois et moins de cent fois le six en six cents jets, ce qui est absurde. Pour réfuter ce sophisme, j'admets qu'en jouant à fortune égale, on doive avoir cent fois le six en six cents jets ; mais je nie que si quelqu'un parie de l'amener une fois en quatre jets, il lui faille quatre jets pour gagner ; car il peut avoir un six au premier, au second ou au troisième jet, et alors le surplus des quatre premiers jets se trouve ajouté aux quatre suivans, de sorte qu'il en faut moins de huit pour gagner et pour perdre une partie. Voici maintenant comment je démontre l'application de ce raisonnement à notre hypothèse : je suppose que le premier de chacune des suites de quatre jets qui me font gagner la partie donne le six ; en ce cas, pour gagner cent fois, il ne me faut que cent jets ; les 500 autres, divisés par 4, dénotent que je perdrai 125 fois ; mais si c'était le dernier jet de chacune de ces suites qui donnât le six, il me faudrait 400 jets pour gagner 100 fois, et il n'en resterait que 200, de sorte que je perdrais 50 fois. Il y a donc des cas où je perdrais plus de fois que je ne gagnerais ; et il y en a d'autres où je gagnerais plus de fois que je ne perdrais ; d'où je conclus qu'il est bien possible que je joue de cette manière à sort égal. Au contraire, si quelqu'un entreprenait d'amener un six en trois jets, il y aurait des cas où il gagnerait autant de fois qu'il perdrait, savoir, si le troisième de chaque suite de trois jets donnait le six ; il y en aurait d'autres où il perdrait beaucoup plus

plus de fois qu'il ne gagnerait, savoir, si le six venait au premier jet de chaque suite ternaire ; mais il n'y en aurait aucun où il gagnât autant de fois qu'il perdrait : et de là il résulte évidemment qu'on ne peut jouer un pareil jeu sans perte. Je suis entré ici dans ce détail, pour faire voir combien peu de confiance méritent ces raisonnemens qui ne touchent qu'à l'écorce, sans pénétrer au fond du sujet ; et cependant rien n'est plus ordinaire dans tout le commerce de la vie, même parmi les hommes les plus sages.

PROPOSITION XI.

Trouver en combien de jets on peut entreprendre d'amener deux six ou sonnez, avec deux dés.

Si quelqu'un entreprend d'amener deux six avec deux dés au premier jet, il est visible qu'il a un cas pour gagner la partie, ou pour avoir a, et qu'il en a 35 pour la perdre, ou pour ne rien avoir, puisqu'il y a 36 coups de dés. Il a donc, par la seconde proposition $\frac{1}{36}a$.

Celui qui entreprend la même chose en deux jets, obtient a, si le premier jet donne sonnez ; s'il ne le donne pas, il lui reste un jet, ce qui, comme on le vient de voir, lui vaut $\frac{1}{36}a$.

Or, il a un cas pour avoir sonnez au premier jet, et 35 pour ne pas l'avoir ; donc, au commencement du jeu, il a un cas pour a et 35 pour $\frac{1}{36}a$, ce qui, par la seconde proposition, vaut $\frac{71}{1296}a$, et il reste, pour son adversaire, $\frac{1225}{1296}a$.

On peut, en partant de là, trouver le sort ou la part de celui qui entreprend la même chose en

quatre jets, en omettant le cas du pari en trois jets.

En effet, celui qui parie d'amener sonnez en quatre jets, obtient a s'il réussit au premier ou au second jet, autrement il lui reste deux jets qui, par ce qui précède, valent $\frac{71}{1296}a$; mais, par la même raison, il a aussi 71 cas pour avoir sonnez au premier ou au second jet, contre 1225 qui ne le donnent point. Il a donc, au commencement du jeu, 71 cas pour a et 1225 pour $\frac{71}{1296}a$, ce qui vaut, par la deuxième proposition, $\frac{178991}{1679616}a$, et il reste pour son adversaire $\frac{1500625}{1679616}a$. Ainsi leurs sorts sont dans le rapport de 178991 à 1500925.

D'après cela, on trouve de la même manière l'attente de celui qui parie d'amener sonnez en 8 jets, et de là le sort du joueur qui l'entreprend en 16. Le sort de ce dernier et de celui qui entreprend la même chose en 8 jets, servent à déterminer l'attente du joueur qui parie d'amener sonnez en 24 jets. Et comme, dans cette opération, on cherche principalement combien il faut de jets pour que le sort du joueur qui parie d'amener sonnez devienne égal à celui de son adversaire, on pourra supprimer quelques-uns des derniers chiffres, sans quoi les nombres K croîtraient immensément. C'est ainsi que je trouve que celui qui entreprend d'amener cette combinaison en 24 jets, n'est pas encore au pair, et que celui qui l'entreprend en 25 jets commence à avoir l'avantage.

REMARQUES.

I *Mais, par la même raison, il a aussi 71 cas, etc.*) Il est bon d'observer ici qu'une attente quelconque, exprimée par une fraction, peut être considérée, ainsi que l'auteur le suppose, comme résul-

tant d'autant de cas pour obtenir le dépôt *a* que l'indique le numérateur de la fraction, et d'autant de cas pour *o* que le désigne la différence entre le dénominateur et le numérateur, quoiqu'on ait pu parvenir d'une autre manière à cette même attente. Ainsi, quoique celui qui entreprend d'amener sonnez en deux jets, ait pour sort $\frac{71}{1296}a$, parce qu'il a 1 cas pour *a* et 35 pour $\frac{1}{36}a$, il pourra encore être considéré comme ayant ce sort à raison de 71 cas pour *a*, et 1225 pour *o* : car avec 71 cas pour *a* et 1225 pour *o*, il a pour sort $\frac{71}{1296}a$; et celui qui aurait plus de cas pour *a* et moins pour *o*, et réciproquement, aurait aussi, contre l'hypothèse, un sort plus ou moins avantageux que $\frac{71}{1296}a$, par le coroll. 1. de la proposition III.

C'est ainsi que je trouve que celui qui entreprend d'amener cette combinaison en 24 jets, etc.) L'auteur a établi, dans la proposition précédente, qu'on peut entreprendre avec avantage d'amener en 4 jets le six avec un seul dé; maintenant il assure qu'il y aurait de la perte à se charger d'amener en 24 jets deux six avec deux dés. C'est ce qui pourra paraître absurde à beaucoup de gens, parce qu'il y a précisément le même rapport entre 24 jets et les 36 positions de deux dés, qu'entre 4 jets et les 6 positions d'un seul dé. Paschal, dans sa lettre à Fermat, qu'on lit à la page 181 de ses œuvres, imprimées à Toulouse en 1679, rapporte que la même difficulté rebuta un certain anonyme, homme d'un grand sens, mais dépourvu de connaissances en géométrie. Ceux qui sont imbus des principes de cette science ne s'arrêtent nullement à ces contradictions apparentes, bien convaincus qu'en mille rencontres, le calcul montre les choses autrement qu'elles ne paraissent au

K

F 2

premier abord : de sorte qu'ils ont grand soin, comme je l'ai conseillé plusieurs fois, de se tenir en garde contre les analogies.

Sur la Proposition en général.

Si, au lieu de nombres, l'auteur eût employé des lettres, il aurait pu renfermer cette proposition et la précédente dans un seul problème, et en trouver la solution générale avec autant de facilité, de la manière suivante. Soit $a=b+c$ le nombre de tous les cas qui peuvent avoir lieu avec un ou plusieurs dés, ou dans tel jeu de hasard que ce soit (car notre calcul ne s'applique pas plutôt aux dés qu'à d'autres épreuves du sort à réitérer un certain nombre de fois, et où le nombre des cas est toujours constant et invariable); soit b le nombre des cas dans lesquels on obtient le nombre de points prescrit, ou dans lesquels on réussit en ce qu'on se propose; et c le nombre des cas qui font manquer ce nombre de points, ou qui empêchent de réussir.

Cela posé, si quelqu'un entreprend d'amener en un coup ce qui a été proposé, il est clair qu'il a b ou $a-c$ cas pour réussir, c'est-à-dire, pour obtenir le dépôt que j'appelle à présent 1, et c cas pour avoir o, ce qui, par le coroll. 1 de la proposition III, lui donne pour sort $\frac{a-c}{a}$: s'il l'entreprend en deux coups, il a $a-c$ cas pour 1 ou pour $\frac{a}{a}$, et c cas pour parvenir au sort précédent, ce qui, par la proposition III, lui vaut $\frac{aa-cc}{aa}$: s'il entreprend la même chose en trois coups, il a encore $a-c$ cas

pour 1 ou pour $\frac{aa}{aa}$, et c cas pour le sort qui vient d'être trouvé, savoir, pour $\frac{aa-cc}{aa}$, ce qui lui vaut $\frac{a^3-c^3}{a^3}$: de même, s'il l'entreprend en 4 coups, son attente se trouve valoir $\frac{a^4-c^4}{a^4}$; si en 5, $\frac{a^5-c^5}{a^5}$; et, en général, s'il l'entreprend en n coups, son sort est $\frac{a^n-c^n}{a^n}$; de sorte qu'il reste à son adversaire $\frac{c^n}{a^n}$.

A cette méthode qui appartient à l'auteur, on peut en ajouter deux autres qui ne sont pas sans élégance. En voici une : cherchez de suite les diverses attentes du joueur, pour les épreuves successives séparément; c'est-à-dire, cherchez par ordre quel est son sort, s'il entreprend d'amener ce qui est proposé au premier, au second, au troisième, au quatrième, etc., coups exclusivement aux autres; la somme de ces attentes diverses sera l'attente cherchée. S'il entreprend de l'amener au premier coup, son sort, comme on l'a vu, est $\frac{a-c}{a} = \frac{b}{a}$. S'il veut l'amener au second coup, et qu'il le fasse au premier, il manque son but, puisqu'il ne devait l'amener qu'au second; ainsi, il est frustré du dépôt: mais, s'il ne l'amène pas au premier coup, il lui reste, pour réussir, un coup unique, qui, comme il a été dit, vaut $\frac{b}{a}$; or, le nombre des cas qu'il a pour l'amener au premier coup, est b, par l'hypothèse, et le nombre des cas où il ne le fait pas est c: donc, par le coroll. 1 de la proposition III, son sort est $\frac{bc}{aa}$. Celui qui se charge d'amener le point où le hasard

prescrit précisément au troisième coup, manque aussi le dépôt s'il l'amène au premier, puisqu'il ne remplit pas la condition imposée, qui était de ne le faire qu'au troisième; mais s'il l'amène au premier coup, il lui reste deux épreuves, dont la seconde seule peut le faire gagner; et alors, il lui est dû $\frac{bc}{aa}$: Or, il y a b cas pour que la chose prescrite arrive au premier coup, et c cas pour qu'elle n'arrive pas : son sort est donc, par le même coroll., $\frac{bcc}{a^3}$. Celui qui prétend réussir précisément au quatrième coup, est également privé du dépôt, s'il ne manque pas au premier, et s'il manque, les trois autres coups le font parvenir à l'attente précédente $\frac{bcc}{a^3}$; ce qui lui donne pour sort actuel $\frac{bc^3}{a^4}$. On trouve de la même manière $\frac{bc^4}{a^5}$, pour le sort du joueur, si c'est au cinquième coup qu'il se charge de réussir; $\frac{bc^5}{a^6}$, si c'est au sixième; et en général $\frac{bc^{n-1}}{a^n}$, si c'est au n^e. Ainsi le sort du joueur est $\frac{b}{a}$, si c'est au premier coup qu'il entreprend d'amener le hasard proposé; $\frac{bc}{aa}$, si c'est au second; $\frac{bcc}{a^3}$, si c'est au troisième; $\frac{bc^{n-1}}{a^n}$, si c'est au dernier: d'où il suit que, comme l'attente de celui qui a entrepris de réussir à quelqu'une des n premières épreuves indéfiniment, est égale à la somme de tous ces sorts particuliers, son attente sera $\frac{b}{a}+$

$\frac{bc}{aa}+\frac{bcc}{a^3}+\frac{bc^3}{a^4}$. . . . jusqu'à $\frac{bc^{n-1}}{a^n}$, suite de termes en progression géométrique, dont la somme est $\frac{a^n-c^n}{a^n}$, comme ci-dessus.

Autre méthode. Celui qui entreprend d'amener avec un seul dé un nombre de points donné en n jets, est au même état que si, jouant avec n dés, il pariait qu'au moins quelqu'un de ces dés offrirait ce nombre de points en un seul jet. Concevez donc n dés à a faces, dont il y en ait c qui ne portent pas le nombre de points dont il s'agit. Le nombre de tous les cas que pourront donner les n dés sera a^n, comme l'auteur l'a démontré à la suite de la proposition IX; et, par la même raison, celui des cas particuliers où aucun des dés n'offrira le nombre de points prescrit sera c^n, parce qu'avec chacune des c faces d'un dé, pourra concourir chacune des c faces semblables des autres dés. Il est donc nécessaire que, dans les a^n-c^n autres cas, ce nombre de points soit donné par un dé ou plusieurs. Ainsi, celui qui fait un tel pari a a^n-c^n cas, pour avoir le dépôt 1, et c^n cas pour avoir o, ce qui lui produit encore le sort précédemment trouvé $\frac{a^n-c^n}{a^n}$, de sorte qu'il reste à son adversaire $\frac{c^n}{a^n}$.

Ce problème étant ainsi résolu d'une manière générale, si nous voulons savoir avec l'auteur combien il faut de jets pour que la condition du joueur soit égale à celle de son adversaire, il suffit d'égaler leurs sorts tels qu'on les vient de trouver, pour avoir $a^n-c^n=c^n$, ou $a^n=2c^n$; d'où résulte cette règle: élevez aux mêmes puissances le nombre de tous les

cas, et le nombre de ceux où l'effet qu'il s'agit de produire n'a pas lieu, jusqu'à ce que le premier nombre devienne le double du second; alors, l'exposant de la puissance indiquera le nombre cherché. Cette opération a cet avantage sur celle de l'auteur, qu'elle ne suppose le calcul d'aucun des cas précédens, et elle admet également les abréviations dont l'auteur fait mention, et qui consistent à supprimer les derniers chiffres, et à chercher par sauts les attentes des joueurs: car le quarré d'un nombre étant donné, l'on peut trouver son biquarré sans avoir son cube, et son biquarré quarré, indépendamment des puissances intermédiaires, etc. Il est bon d'exposer ici toute l'opération relative à l'exemple de l'auteur, où $a = 36$ et $c = 35$.

	Trop faible.	*Trop fort.*
$a =$	36	
$aa =$	1296	
$a^4 =$	1679 . . .	1680 . . .
$a^8 =$	2819 . . .	2823 . . .
$a^{16} =$	7946 . . .	7970 . . .
$a^{24} =$	2239 . . .	2250 . . .
$a^{25} =$	8060 . . .	8100 . . .

	Trop faible.	*Trop fort.*
$c =$	35	
$cc =$	1225	
$c^4 =$	1500. . .	1501 . . .
$c^8 =$	2250. . .	2254 . . .
$c^{16} =$	5062. . .	5081 . . .
$c^{24} =$	1138. . .	1146 . . .
$c^{25} =$	3983. . .	4011 . . .
$2c^{24} =$	2276. . .	2292 . . .
$2c^{25} =$	7966. . .	8022 . . .

Où l'on voit que la 24e. puissance du nombre 36, qui tombe entre 2239... et 2250..., est plus petite que le double de la 24e. puissance du nombre 35, qui tombe entre 2276... et 2292...; mais que la 25e. puissance du premier, qui a pour limites 8060... et 8100..., excède le double de la même puissance du dernier, qui est entre 7966... et 8022...

Il

Il faut pourtant avertir que tout cela peut se faire d'une manière, sans comparaison, plus expéditive, par les logarithmes, comme il suit : puisque nous avons $a^n = 2c^n$, et que des nombres égaux ont des logarithmes égaux, nous aurons aussi $nla = l2 + nlc$, ou $nla - nlc = l2$, ou, enfin, $n = \frac{l2}{la - lc}$. On trouvera donc le nombre de jets cherché, en divisant simplement le logarithme de 2, par la différence des logarithmes des nombres a et c.

Voici l'opération :

$a = 36$	$la = 1 . 5563025$
$c = 35$	$lc = 1 . 5440680$

$\frac{l2}{la - lc} = \frac{l2}{0.0122345} = 0.3010300$, plus de 24, et moins de 25 ; ce qui s'accorde parfaitement avec le calcul de l'auteur et avec le nôtre.

La solution qu'on vient de voir nous a donné l'occasion d'examiner quelques problèmes du même genre, tels que celui-ci : on suppose que plusieurs joueurs entreprennent d'amener un nombre de points donné, et qu'on accorde à chacun plusieurs jets consécutifs, à l'un plus, à l'autre moins ; on demande quel est le sort de chaque joueur. D'abord il est clair, par ce qui vient d'être démontré, que celui dont on cherche le sort aurait $\frac{a^n - c^n}{a^n}$, s'il jouait le premier ; mais, s'il y en a d'autres qui le précèdent, son sort doit avoir moins de valeur. On voit ensuite que la somme des attentes de ceux qui jouent avant lui, doit être égale à l'attente d'un seul qui les remplacerait tous, et à qui l'on accorderait autant de jets qu'ils en ont ensemble ; mais, si l'on appelle s,

le nombre de ces jets, cette attente sera, par la même raison, $\frac{a^s-c^s}{a^s}$: donc, lorsque le premier commence à jouer, il y a a^s-c^s cas pour que quelqu'un des premiers en ordre gagne la partie, et enlève le dépôt à celui dont on cherche le sort, et c^s cas pour que celui-ci soit en tour, et pour qu'il acquière le sort $\frac{a^n-c^n}{a^n}$, ce qui, par le coroll. I de la proposition III, vaut $\frac{(a^n-c^n)c^s}{a^n a^s} = \frac{ac^s-c^{n+s}}{a^{n+s}}$. C'est ce qu'on peut encore démontrer de la manière suivante : puisque, par l'hypothèse, on a accordé à tous les joueurs, le dernier compris, $s+n$ jets, leur attente totale sera $\frac{a^{s+n}-c^{s+n}}{a^{s+n}}$; si donc on en retranche la somme $\frac{a^s-c^s}{a^s}$ des attentes de ceux qui le précèdent, il restera pour la sienne seule $\frac{a^{s+n}-c^{s+n}}{a^{s+n}} - \frac{a^s-c^s}{a} = \frac{a^n c^s-c^{n+s}}{a^{n+s}}$, comme ci-devant. Remarquez qu'on abrège singulièrement ce calcul, si les nombres a et c ont un facteur commun, et que, par le coroll. II de la proposition III, on leur substitue les moindres termes dans le même rapport. Supposons, par exemple, que quelques joueurs parient d'amener 7 points avec deux dés, et qu'on accorde au premier 1 jet, au second 2, au troisième 3, au quatrième 4 jets consécutifs, et que je veuille savoir quelle est l'attente du quatrième. Puisqu'ici le nombre des jets du 4e., ou $n=4$, que la somme des jets accordés à ceux qui le précèdent, ou $s=1+2+3=6$, et qu'ainsi $\frac{a^n c^s-c^{n+s}}{a^{n+s}} = \frac{a^4 c^6-c^{10}}{a^{10}}$; que d'ailleurs a et c, nombres de tous les cas que donnent deux dés, et de ceux où l'on n'amène pas

sept points, sont 36 et 30, auxquels on peut substituer seulement 6 et 5, j'en conclus que si du produit de la quatrième puissance de 6, multipliée par la sixième puissance de 5, j'ôte la dixième puissance de 5, et que je divise le reste par la dixième puissance de 6, j'aurai la valeur de l'attente cherchée du 4e. joueur, savoir, $\frac{10484375}{60466176}$.

Dans ce problème, il est manifeste que la somme des attentes des joueurs, en quelque nombre qu'ils soient, et quel que soit celui des jets qu'on leur accorde, est toujours au-dessous de l'unité, car il est toujours possible qu'aucun d'eux n'amène le nombre de points prescrit, quelque rare que cela puisse être. D'ailleurs, il est encore de toute évidence qu'à nombre égal de jets, chacun des derniers joueurs a une condition moins avantageuse que chacun des premiers, et d'autant moins qu'on accorde à chacun plus de jets consécutifs, puisqu'on peut en accorder assez pour que l'espoir du premier joueur devienne presque une certitude, et que celui des autres s'évanouisse. Cette considération nous a suggéré cet autre problème. Le nombre des jets accordés au premier joueur étant donné, combien faut-il en accorder au second et aux autres pour que les sorts de tous les joueurs soient égaux? Or, le nombre des jets du premier doit être tel que son sort n'excède pas $\frac{1}{2}$ s'il y a deux joueurs, $\frac{1}{3}$ s'il y en a trois, $\frac{1}{4}$ s'il y en a quatre, etc., autrement le problème serait impossible. Soient m le nombre des joueurs, x celui des jets qu'ils ont ensemble, y celui des jets qu'ils ont tous, excepté le dernier, et partant $x-y$ le nombre des jets du dernier seulement; enfin, n, le nombre des jets du premier: l'attente de celui-ci sera $\frac{a^n-c^n}{a^n}$, et la somme de celles de tous les

joueurs conjointement, $\frac{a^n-c^n}{a^n}$; et comme l'attente de chacun est supposée égale à celle du premier, cette somme sera aussi $\frac{m(a^n-c^n)}{a^n}$. On aura donc $\frac{m(a^n-c^n)}{a^n}=\frac{a^x-c^x}{a^x}$, ou $m-\frac{mc^n}{a^n}=1-\frac{c^x}{a^x}$, ou, en transposant $\frac{c^x}{a^x}=\frac{mc^n}{a^n}+1-m=\frac{mc^n+\overline{1-m}a^n}{a^n}$; et, en prenant les logarithmes, $x\,lc-x\,la=l(mc^n+\overline{1-m}a^n)-n\,l\,a$, puis en divisant, $x=\frac{l(mc^n+\overline{1-m}a^n)-n\,l\,a}{lc-la}$, ou en changeant les signes à cause de $a>c$, $x=\frac{n\,l\,a-l(mc^n+\overline{1-m}a^n)}{l\,a-l\,c}$. Par la même raison, la somme des attentes de tous les joueurs qui précèdent le dernier, c'est-à-dire, des $m-1$ premiers joueurs est $\frac{(m-1).(a^n-c^n)}{a^n}=\frac{a^y-c^y}{a^y}$; d'où l'on tire de la même manière $y=\frac{n\,l\,a-l(\overline{m-1}\,c^n+\overline{2-m}a^n)}{l\,a-l\,c}$: on a donc enfin $x-y=\frac{l(\overline{m-1}\,c^n+\overline{2-m}a^n)-l(mc^n+\overline{1-m}a^n)}{l\,a-l\,c}$, ce qu'il fallait trouver. Par exemple, s'il y a trois joueurs, au premier desquels il soit accordé deux jets, et qu'il soit question d'amener 7 points avec deux dés, ou 6 points avec un dé, ce qui est la même chose, puisque, dans les deux cas, la raison du nombre a au nombre c est celle de 6 à 5; alors, comme $n=2$, le sort du premier, selon ce qui a été démontré ci-dessus, est $\frac{aa-cc}{aa}=\frac{11}{36}$, un peu moins du tiers du dépôt. Je fais d'abord $m=2$, ensuite $m=3$; et je trouve par-là que pour que les sorts soient à peu près égaux, il faut accorder trois jets au second joueur, et huit au troisième.

PROPOSITION XIIe.

Trouver avec combien de dés on peut entreprendre d'amener deux 6 au premier jet.

Cette question est précisément la même que s'il L
s'agissait de savoir en combien de jets on peut entreprendre d'amener deux fois le 6 avec un seul dé. Si quelqu'un l'entreprenait en deux jets, il lui écherrait, comme on l'a vu, $\frac{1}{36}$ *a*. Celui qui se chargerait M
de l'amener en trois jets, et qui ne l'aurait pas au premier, aurait encore deux jets, dont il faudrait que chacun donnât le 6, ce que nous avons dit valoir $\frac{1}{36}$ *a*; mais s'il avait le 6 au premier jet, il suffirait que les deux autres lui donnassent une fois ce nombre de points, ce qui, par la proposition X, vaut $\frac{11}{36}$ *a*: or il certain qu'il n'a qu'un cas pour avoir le 6 au premier jet, et qu'il en a cinq pour ne l'avoir pas. Il a donc au commencement du jeu un cas pour $\frac{11}{36}$ *a*, et cinq cas pour $\frac{1}{36}$ *a*, ce qui, par la proposition II, vaut $\frac{16}{216}$ *a* ou $\frac{2}{27}$ *a*. Si l'on continue le calcul graduellement, en supposant toujours un jet de plus, on trouve qu'on peut parier avec avantage d'amener deux fois le 6 en dix jets avec un seul dé, ou d'amener deux 6 avec dix dés au premier jet.

REMARQUES.

Cette question est précisément la même, etc.) Si, par L
exemple, on accorde un jet avec dix dés, il est de toute évidence qu'il n'importe nullement que les dés soient jetés ensemble et d'un seul coup, ou qu'ils

le soient successivement et l'un après l'autre; et s'ils le sont successivement, il est encore constant qu'il est indifférent de jeter dix dés différens, ou de jeter dix fois le même dé.

M *Comme on l'a vu, etc.*) Car on a vu dans la proposition précédente que $\frac{1}{36}a$ est la part de celui qui entreprend d'amener deux six en un seul jet avec deux dés; mais il vient d'être observé qu'il est indifférent d'avoir un seul jet avec deux dés, ou d'avoir deux jets avec un seul dé; donc celui qui entreprend d'amener deux six avec un seul dé en deux jets a aussi pour sort $\frac{1}{36}a$.

Sur la proposition en général.

Le problème que l'auteur propose ici est susceptible, comme le précédent, d'une solution algébrique. Pris en général, il consiste à trouver quelle est l'attente de celui qui a entrepris d'amener un hasard deux fois, trois fois, quatre fois, ou plus souvent, en un nombre donné d'épreuves: car le sort de celui qui ne se charge de l'amener qu'une fois a déjà été calculé dans la proposition précédente.

Celui qui a entrepris d'amener un hasard deux fois en deux coups, et qui le manque au premier, n'a aucune partie du dépôt qu'il laisse tout entier à son adversaire; mais s'il réussit au premier coup, il est encore tenu de réussir au second, et alors il a pour sort $\frac{a-c}{a}$, selon ce qui a été remarqué sur la proposition précédente (les lettres a, b, c conservant les mêmes valeurs), et il reste $\frac{c}{a}$ pour son adversaire, dont il convient de chercher le sort par

préférence, vu que l'expression en est plus simple. Or, il a b cas pour réussir, et c cas pour manquer au premier coup. Son adversaire a donc c cas pour avoir le dépôt $1 = \frac{c+b}{a}$ et b cas pour avoir $\frac{c}{a}$; ce qui lui vaut $\frac{cc+2bc}{aa}$

Si quelqu'un se charge de faire une chose deux fois en trois coups, et qu'il réussisse au premier, ce qui arrive toujours en b cas, il n'a plus besoin que de réussir une fois en deux coups, et partant il laisse à son antagoniste $\frac{cc}{aa}$, selon ce qui a été remarqué sur la proposition précédente; mais s'il manque au premier coup, ce qui arrive en c cas, il faut qu'il réussisse deux fois aux deux coups suivans, ce qui, comme nous venons de le dire, vaut à son adversaire $\frac{cc+2bc}{aa}$. Celui-ci a donc c cas pour $\frac{cc+2bc}{aa}$ et b cas pour $\frac{cc}{aa}$, ce qui lui donne pour sort $\frac{c^3+3bcc}{a^3}$.

De même celui qui parie de faire une chose deux fois en quatre coups, laisse, à cause des b cas, où il peut réussir au premier, le sort $\frac{c^3}{a^3}$ à son adversaire, et, par les c cas contraires, il le fait arriver à l'attente précédente $\frac{c^3+3bcc}{a^3}$, ce qui vaut à ce dernier $\frac{c^4+4bc^3}{a^4}$.

Que si quelqu'un veut amener un hasard trois fois en trois coups, et qu'il manque au premier, il laisse à son adversaire tout le dépôt $1 = \frac{+2bc+bb}{aa}$; mais si le premier coup lui est favorable, il lui reste deux

coups, dont il faut encore que chacun lui réussisse; et nous avons vu qu'alors le sort de son adversaire est $\frac{cc+2bc}{aa}$: or il a b cas pour réussir et c cas pour manquer au premier coup. Donc l'attente de son adversaire est $\frac{c^3+3bcc+3bbc}{a^3}$.

On peut déduire de la même manière les attentes de celui qui parie qu'un joueur n'amènera pas un hasard 2, 3, 4 fois ou plus souvent, en 4, 5, 6 coups ou davantage. C'est ce qui a donné lieu à la table suivante qu'il est aisé de continuer au besoin. Il suffit pour cela de considérer que les colonnes transversales de cette table contiennent des termes consécutifs de toutes les puissances du binôme $\frac{c+b}{a}$, que la seconde par exemple, comprend une suite de termes du quarré; la troisième du cube, la quatrième du biquarré, etc.; de sorte que la première colonne verticale présente seulement les premiers, la seconde les deux premiers, la troisième les trois premiers, la quatrième les quatre premiers termes de ces puissances; car on en conclut aisément que celui qui accorde n jets à un joueur pour amener un hasard, a pour sort $(c^n+nbc^{n-1})\frac{1}{a}$, s'il s'agit de l'amener deux fois; $(c^n+nbc^{n-1}+\frac{n.n-1}{2}bb\,c^{n-2})\frac{1}{a^n}$, s'il s'agit de l'amener trois fois; $(c^n+nbc^{n-1}+\frac{n.n-1}{2}bb\,c^{n-2}+\frac{n.n-1.n-2}{2.\ 3}b^3c^{n-3})\frac{1}{a^n}$, s'il s'agit de l'amener quatre fois; et en général $(c^n+nbc^{n-1}+\frac{n.n-1}{2}bb\,c^{n-2}+\frac{n.n-1.n-2}{2.\ 3}b^3c^{n-3}\ldots$ jusqu'à $+\frac{n.n-1.n-2\ldots n-m+2}{2.\ 3\ldots m-1}b^{m-1}c^{n-m+1})\frac{1}{a^n}$, s'il s'agit de l'amener m fois.

TABLE

Pour trouver le sort de celui qui parie qu'en un certain nombre d'épreuves un joueur n'amènera pas un hasard un certain nombre de fois.

Nota. *Le sort du joueur est toujours le complément à l'unité de celui de son adversaire. Le nombre de tous les cas pour chaque épreuve* = a, *le nombre des cas favorables au joueur* = b, *celui des cas contraires* = c.

Nombre des Jets	Pour amener un hasard.				
	Une fois.	*Deux fois.*	*Trois fois.*	*Quatre fois.*	
I.	$\frac{c}{a}$				
II.	$\frac{cc}{aa}$	$\frac{cc+2bc}{aa}$			
III.	$\frac{c^3}{a^3}$	$\frac{c^3+3bc^2}{a^3}$	$\frac{c^3+3bbc+3bcc}{a^3}$		
IV.	$\frac{c^4}{a^4}$	$\frac{c^4+4bc^3}{a^4}$	$\frac{c^4+4bc^3+6b^2c^2}{a^4}$	$\frac{c^4+4bc^3+6b^2c^2+4b^3c}{a^4}$	
V.	$\frac{c^5}{a^5}$	$\frac{c^5+5bc^4}{a^5}$	$\frac{c^5+5bc^4+10b^2c^5}{a^5}$	$\frac{c^5+5bc^4+10b^2c^3+10b^3c^2}{a^5}$	etc.
VI.	$\frac{c^6}{a^6}$	$\frac{c^6+6bc^5}{a^6}$	$\frac{c^6+6bc^5+15b^2c^4}{a^6}$	$\frac{c^6+6bc^5+15b^2c^4+20b^3c^3}{a^6}$	

m *fois.*

$n.$ $\left(c^n+nbc^{n-1}+\frac{n.n-1}{1.\,2}b^2c^{n-2}+\frac{n.n-1.n-2}{1.\,2.\,3}b^3c^{n-3}\ldots+\frac{n.n-1.n-2\ldots n-m+2}{1.\,2.\,3\ldots m-1}b^{m-1}c^{n-m+1}\right)\frac{1}{a^n}$

On peut parvenir autrement à la même formule, et la déduire élégamment de la théorie des combinaisons, de la manière suivante. Il est constant, par ce qui précède, qu'il revient au même d'entreprendre d'amener m fois une face donnée, avec un dé, en n jets, ou d'amener m faces semblables, avec n dés, en un seul jet. Soient donc les dés A, B, C, D, etc., dont le nombre soit n, ayant chacun a faces, b favorables et c contraires au joueur ou à celui qui tient le dé, et qu'il soit question de savoir en combien de cas il peut arriver qu'il n'y ait qu'un seul dé, qu'il n'y en ait que deux, trois, quatre, etc., et enfin qu'il n'y en ait que $m-1$ qui donnent la face favorable au joueur; car, dans tous ces cas, il manque son but, et son antagoniste gagne le pari. Il a été démontré dans les remarques sur la proposition précédente qu'il y a c^n cas où il peut arriver qu'aucun des n dés ne donne la face dont il s'agit; et l'on voit également qu'il y a b ou bb ou b^3, etc. cas où un dé déterminé, comme A ou deux, A et B, ou trois, A, B et C, etc., sont favorables au joueur, comme il y en a c^{n-1}, ou c^{n-2}, ou c^{n-3}, etc., dans lesquels les autres $n-1$, ou $n-2$, ou $n-3$, etc. dés lui sont contraires: et comme chacun de ces derniers cas peut arriver avec chacun des premiers, le produit de leur multiplication en donnera bc^{n-1}, ou b^2c^{n-2} ou b^3c^{n-3}, etc. Mais le dé ou les dés favorables au joueur pouvant être A, ou B ou C, etc., s'il n'y en a qu'un; ou bien A et B, ou A et C, ou B et C, etc., s'il y en a deux; ou bien A, B et C, ou A, B et D, etc., s'il y en a trois, etc., il en résulte que ces nombres de cas doivent encore être multipliés par les nombres qui indiquent combien de fois tous les n dés peuvent se prendre un à un, deux à deux, ou trois à trois, etc: or, par la théorie

des combinaisons, qui sera expliquée dans la seconde partie, ces derniers nombres sont n, ou $\frac{n.n-1}{1.2}$ ou $\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}$, etc. Cette seconde multiplication étant faite on a les nombres de cas nbc^{n-1}, ou $\frac{n.n-1}{2}b^2c^{n-2}$, ou $\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}b^3c^{n-3}$, dans lesquels la face favorable est donnée seulement par un, ou par deux, ou par trois dés pris d'une manière quelconque ; d'où il est aisé de conclure que $\frac{n.n-1.n-2\ldots n-m+2}{1.2.3\ldots m-1}b^{m-1}c^{n-m+1}$ sera le nombre de cas où la face favorable au joueur sera donnée par $m-1$ dés. Donc, puisque tous les cas qui viennent d'être énumérés font gagner le pari à l'antagoniste du joueur, et que d'ailleurs le nombre de ceux que donnent n dés est a^n, le sort de cet adversaire sera, par le coroll. 1 de la prop. III, $(c^n+nbc^{n-1}+\frac{n.n-1}{1.2}b^2c^{n-2}+\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}b^3c^{n-3}\ldots+\frac{n.n-1.n-2\ldots n-m+2}{1.2.3\ldots m-1}b^{m-1}c^{n-m+1})$ $\frac{1}{a^n}$, comme ci-dessus.

Mais, comme dans la question proposée, ainsi que dans la précédente, il s'agit principalement de savoir combien il faut de jets pour que le sort du joueur devienne égal à celui de son adversaire, ou pour que chacun d'eux ait le droit de prétendre la moitié du dépôt, je n'ai plus qu'à former une équation entre le sort trouvé de l'adversaire et $\frac{1}{2}$, pour en déduire, autant qu'il est possible, la valeur du nombre n. Par exemple, si je veux savoir avec l'auteur combien il faut de jets pour que celui qui parie

H 2

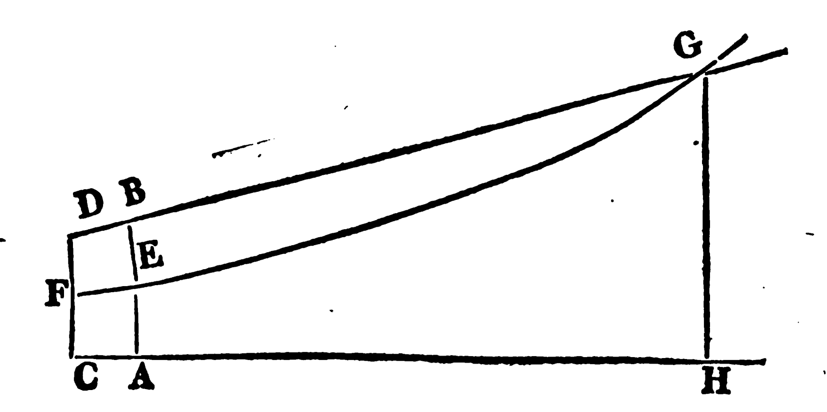
d'amener deux fois le 6 avec un dé, joue à jeu égal, je fais $\frac{c^n+nbc^{n-1}}{a^n}=\frac{1}{2}$, et j'ai $a^n=2\,c^{n-1}+2\,nb\,c^n\;=(2c+2n\,b)c^{n-1}$ ce qui indique qu'il faut élever le nombre a à une puissance qui soit à peu près égale au produit de la puissance du nombre c plus basse d'un degré et du double de la somme de c et de b, ce dernier multiplié par l'exposant de a; car, après l'opération, l'exposant de a indiquera en combien de jets on peut entreprendre d'amener deux fois un hasard déterminé. Voici le calcul pour l'exemple de l'auteur, dans lequel a, nombre de tous les cas que donne un seul dé, $=6$, b, nombre de ceux qui donnent le $6=1$, et c, nombre de ceux qui ne le donnent pas, $=5$.

	$c\;=5$
$a\;=6$	$cc=25$
$a^3=216$	$c^4=625$
$a^9=10077696$	$c^8=390625$
$a^{10}=60466176$	$c^9=1953125$

$$a^9=10077696<10937500=28\times390625=\overline{2c+18b}.c^8.$$

$$a^{10}=60466176>58593750=30\times1953125=\overline{2c+20b}.c^9.$$

Ainsi la neuvième puissance de a étant encore au-dessous, mais la dixième étant au-dessus de la puissance de c, inférieure d'un degré, multiplié comme il a été dit, on doit en conclure que neuf jets ne sont pas encore suffisans, mais qu'on peut entreprendre, avec avantage, d'amener deux fois le 6 en dix jets avec un dé.



C'est ce qu'on peut encore construire géométriquement par le moyen de la logarithmique. Soit CH l'axe d'une logarithmique quelconque FEG : menez les ordonnées EA, FC qui soient dans le rapport de a à c, et prolongez-les de tonte leur longueur en B et en D ; par ces deux points, menez la droite BD qui rencontre la courbe en G, d'où vous abaisserez l'ordonnée GH : alors, CA étant pris pour l'unité, vous aurez $CH = n$, nombre de jets avec lequel on peut entreprendre d'amener deux fois un hasard donné. Et ce que nous venons de déterminer par la rencontre de la ligne droite et de la logarithmique, on pourrait le faire par l'intersection de la parabole et de la logarithmique, s'il était question d'amener trois fois un même hasard, et par le moyen de cette

dernière courbe, et d'une courbe algébrique d'un genre graduellement plus élevé, s'il était question de l'amener quatre fois ou davantage.

Nous pourrions ici, comme sur la proposition précédente, pousser plus loin nos recherches, et calculer les sorts de plusieurs joueurs qui, ayant chacun tant de coups à jouer successivement en nombres égaux ou inégaux, parieraient d'amener un certain nombre de fois un même hasard. Nous pourrions encore former plusieurs questions de cette espèce, mais il faut avancer, et laisser quelque chose à l'industrie du lecteur.

Cependant, afin qu'on ne puisse pas se méprendre sur ce qui précède, nous croyons devoir avertir que les problèmes qui dépendent de cette proposition et de la précédente, et qui consistent à trouver l'attente de celui qui entreprend d'amener une seule fois, ou tant de fois, un hasard donné, doivent s'entendre en ce sens que le joueur ne laissera pas de gagner, si ce hasard arrive plus souvent : car s'il devait perdre alors, le problème serait tout différent, et il en résulterait d'autres attentes qui trouveront leur application dans ce qui va suivre, et que par conséquent nous avons encore à déterminer, avant de quitter ce sujet.

Pour rendre la solution plus générale, supposons que le nombre des cas ne soit pas constant, mais qu'il varie d'un jet à l'autre d'une manière quelconque en appelant :

Pour le jet.	1er.	2e.	3e.	4e.	5e.
Le nombre de tous les cas.	a.	d.	g.	p.	s.
Le nombre des cas favorables.	b.	e.	h.	q.	t.
Le nombre des cas contraires.	c.	f.	i.	r.	u.

Cela posé, s'il a été accordé cinq jets, par exemple, et qu'il soit question d'évaluer le sort de celui qui aurait entrepris de réussir à quelques-uns, comme aux trois premiers, et non aux autres, il faut considérer que chacun des *b* cas du premier jet peut venir avec chacun des *e* cas du second, et que chacun des *be* cas qui en résultent peut encore venir avec chacun des *h* cas du troisième, ce qui donne *beh* cas; que de même chacun des *r* cas du 4e. jet peut venir avec chacun des *u* cas du cinquième, ce qui donne *ru* cas; qu'ainsi chacun de ces derniers pouvant arriver avec chacun des premiers *beh*, le nombre de tous ceux où le joueur réussit aux trois premiers jets, et non aux deux derniers, est *behru*; et comme le nombre de tous les cas pour les cinq jets est, par la même raison, *adgps*, le sort cherché est $\frac{behru}{adgps}$, par le 1 coroll. de la prop. III. De là se tire la règle suivante :

RÈGLE

Pour connaître le sort d'un joueur à qui sont accordés plusieurs jets, et qui est tenu d'amener un hasard donné à quelques-uns de ces jets précisément, et non à d'autres.

Multipliez le produit des cas qui donnent le hasard dont il s'agit, et où le joueur est tenu de l'amener, par celui des cas qui ne le donnent point, et où il est tenu de ne pas l'amener, et divisez ce dernier produit par celui de tous les cas qui ont lieu pour tous les jets : le quotient exprimera le sort cherché.

Corollaire 1er. Si les nombres des cas sont les mêmes pour tous les jets, c'est-à-dire, si l'on a $d=g=p=s=a$; $e=h=q=t=b$, et $f=i=r=u=c$; le sort trouvé $\frac{behru}{adgps}$ deviendra $\frac{b^3c^2}{a^5}$, et plus généralement $\frac{l^m c^{n-m}}{a^n}$, n étant le nombre de tous les jets, et m le nombre de ceux où le joueur est tenu d'amener le hasard proposé.

Coroll. 2. Si les nombres des cas sont les mêmes pour tous les jets, et que le nombre des jets où il faut amener le hasard soit déterminé, mais qu'il ne soit pas nécessaire de l'amener à tel et tel jet précisément; par exemple, s'il a été accordé 5 jets, et que le joueur soit tenu de réussir trois fois, sans autre limitation, il est clair que le sort qui vient d'être trouvé doit être multiplié par le nombre qui exprime combien de fois cinq jets peuvent être pris de fois trois à trois, ou, en général, combien de fois n choses peuvent être prises m à m. Or, par la théorie des combinaisons, que nous donnerons dans la seconde partie, ce nombre est $\frac{n.n-1.n-2.n-3 \ldots\ldots n-m+1}{1.2.3.4 \ldots\ldots m}$

ou, ce qui est la même chose, $\frac{n.n-1.n-2.n-3 \ldots m+1}{1.2.3.4 \ldots n-m}$.

Ainsi l'attente du joueur vaudra $\frac{n.n-1.n-2.n-3 \ldots n-m+1}{1.2.3.4 \ldots m}$.

$\frac{b^m c^{n-m}}{a^n}$, ou $\frac{n.n-1.n-2.n-3 \ldots\ldots m+1}{1.2.3.4 \ldots\ldots n-m} \cdot \frac{b^m c^{n-m}}{a^n}$

PROPOSITION

PROPOSITION XIIIe.

Si j'ai un coup à jouer avec deux dés, et que la loi du jeu soit que je gagnerai le pari si j'amène 7 points, que mon adversaire le gagnera si j'en amène 10, et que, dans tout autre cas, nous partagerons également l'argent du jeu, quelle part avons-nous chacun à y prétendre ?

Puisque sur les 36 cas que donnent deux dés, il y en a 6 pour sept points et 3 pour dix, il en reste 27 où les deux sorts sont égaux, et où il nous appartient à chacun $\frac{1}{2}$ a. S'il n'échet aucun de ces 27 cas, j'en aurai 6 pour gagner le pari, c'est-à-dire, pour avoir a, et 3 pour le perdre et ne rien avoir; ce qui, par la IIe. proposition, me vaudrait $\frac{2}{3}$ a. J'ai donc, au commencement du jeu, 27 cas pour $\frac{1}{2}$ a, et 9 cas pour $\frac{2}{3}$ a; ce qui, par la même proposition, équivaut à $\frac{13}{24}$ a, et il reste pour mon adversaire $\frac{11}{24}$ a.

REMARQUES.

S'il n'échet aucun de ces 27 cas, etc.) L'auteur commence par chercher l'attente de celui qui a 6 cas pour gagner et 3 pour perdre, et c'est de cette attente, qui vaut $\frac{2}{3}$ a, qu'il déduit celle qu'il cherche. Mais on peut aussi trouver celle-ci immédiatement et sans connaître la première, car 27 cas pour $\frac{1}{2}$ a, 6 cas pour a et 3 pour o que me donne la loi du jeu, me valent également $\frac{13}{24}$ a, par le coroll. 1 de la prop. III; de même que 27 cas pour $\frac{1}{2}$ a, 3 cas pour a et 6 pour o qu'a mon adversaire, lui valent $\frac{11}{24}$ a, par le même coroll.

O *Et il reste pour mon adversaire* $\frac{11}{24}$ a) C'est-à-dire, le reste du dépôt ; car, comme nous aurons infailliblement tous deux ensemble, à la fin du jeu, la totalité du dépôt, ni plus ni moins, nos deux attentes prises collectivement doivent l'épuiser tout entier, d'après notre axiôme, et comme nous l'avons remarqué sur la prop. IV, lettre C. Il en serait autrement s'il y avait des cas où d'autres dussent aussi participer au dépôt ; par exemple, si, lorsqu'il n'échet ni 6 ni 10 points, l'argent du jeu devait être donné aux pauvres : car ayant alors 6 cas pour a et 30 pour o, je n'aurais plus à attendre que $\frac{1}{6}\,a$, et le sort de mon adversaire, à cause de 3 cas pour a et de 33 cas pour o, ne vaudrait plus que $\frac{1}{12}\,a$: le reste du dépôt $\frac{3}{4}\,a$ serait dû aux pauvres, qui, par cette raison, seraient censés être de la partie.

PROPOSITION XIV.

Si jouant avec deux dés, que nous jetons alternativement mon adversaire et moi, je dois gagner dès que j'amènerai 7 points, et lui dès qu'il en amènera 6, et que je lui aye accordé le premier jet, quel sera le rapport de mon sort au sien ?

Soient x mon sort et a le dépôt ; le sort de mon antagoniste sera $a-x$, et il est clair que toutes les fois que les dés lui reviendront, mon sort sera encore $=x$: mais quand c'est à moi à jouer, mon sort a plus de valeur. Soit cette valeur y. Puisque sur 36 cas que donnent deux dés, il y en a 5 qui donnent 6 points et qui font gagner la partie à mon adversaire, et 31 autres où les dés me viennent, j'aurai, avant qu'il joue, 5 cas pour o et 31 cas pour y, ce qui,

par la III prop., vaut $\frac{31y}{36}$; mais nous avons supposé d'abord que mon sort était $= x$. On aura donc $\frac{31y}{36} = x$, et partant $y = \frac{36x}{31}$. Nous avons supposé d'ailleurs que quand c'est à moi à jouer, mon sort vaut y. Or, j'ai alors 6 cas pour a, puisqu'il y en a 6 pour 7 points qui me font gagner la partie ; et j'ai 30 cas pour x, puisqu'il y en a 30 où les dés reviennent à mon adversaire, ce qui, par la IIIe. prop., vaut $\frac{6a+30x}{36} = y$. Mais nous avons déjà trouvé $\frac{36x}{31} = y$. On a donc $\frac{30x+6a}{36} = \frac{36x}{31}$, d'où l'on tire $x = \frac{31a}{61}$, valeur de mon sort ; par conséquent, celui de mon adversaire vaut $\frac{30a}{61}$: ainsi, mon sort est au sien comme 31 à 30.

REMARQUES.

Dans ce problème, l'auteur est obligé d'avoir recours à l'analyse algébrique, tandis que, dans tous les précédens, il n'avait employé que la synthèse. La raison de la différence est que, dans ceux qui précèdent, l'attente cherchée découlait d'autres attentes, ou entièrement connues et données, ou inconnues, mais naturellement antérieures et plus simples, et qui ne dépendaient pas de celle qu'il s'agissait de trouver : ainsi, en commençant par les plus simples de toutes, il pouvait avancer graduellement, et passer à des cas de plus en plus compliqués, et les résoudre sans aucune espèce d'analyse ; mais il

n'en est pas de même ici : car, pour déterminer, à la manière de l'auteur, le sort que j'ai, lorsque mon adversaire joue, il faut que je sache quel est celui que j'acquiers, lorsque les dés me viennent, et je ne puis le savoir sans connaître le premier, qui est pourtant celui que mon intention est de chercher. Ces deux sorts étant donc inconnus, et dépendant l'un de l'autre réciproquement, on ne peut, en marchant sur les traces de l'auteur, les déduire l'un de l'autre, sans le secours de l'analyse. J'ai cru devoir faire ici cette observation, et profiter d'un exemple frappant, pour montrer la différence des deux méthodes, et des cas où l'on doit les appliquer.

J'ai dit, *on ne peut, en marchant sur les traces de l'auteur*); car il y a encore une autre voie particulière qui conduit à la solution du problème, sans analyse, et qui peut servir aussi dans ce qui va suivre. Au lieu de deux joueurs jetans alternativement les dés, supposons-en une infinité, à chacun desquels il soit accordé un seul jet, et jouans successivement, à condition que celui des joueurs en ordre impair, qui le premier amènera six points, ou des joueurs en ordre pair, qui le premier en amènera sept, gagnera la partie, et emportera le dépôt. Dans cette hypothèse, il est clair que le second joueur ne peut gagner, à moins que le dernier des deux premiers jets ne soit le seul qui donne sept points; que le troisième ne peut avoir l'avantage, à moins que le troisième des trois premiers jets ne soit le seul qui en donne six; ni le quatrième, à moins que le dernier des quatre premiers jets ne soit le seul qui en donne sept, et ainsi de suite : si donc à 5 et à 31, nombres des cas favorables, et contraires à six points, avec deux dés, nous substituons b et c, qu'à 6 et à 30, nombres des cas

favorables, et contraires à sept points, nous substituions *e* et *f*, et que nous représentions par *a* le nombre de tous les cas $b+c$, ou $e+f$, la règle apposée à la fin des remarques, sur la proposition XII, nous donnera les sorts des joueurs comme il suit

Joueurs.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	etc.
Sorts.	$\frac{b}{a}$.	$\frac{ce}{aa}$.	$\frac{bcf}{a^3}$.	$\frac{ccef}{a}$.	$\frac{bccff}{a^5}$.	$\frac{c_3eff}{a^6}$.	$\frac{bc^3f^3}{a^7}$.	$\frac{c^4ef^3}{a^8}$	etc.

Si l'on suppose maintenant que le premier, le troisième, le cinquième et autres joueurs en ordre impair, soient remplacés par un seul, que le second, le quatrième, le sixième et autres en ordre pair, le soient par moi, il est constant qu'on aura l'espèce même de la question présente, et de plus, que mon attente et celle de l'autre remplaçant seront respectivement égales à la somme de celles des joueurs, auxquels nous sommes respectivement substitués. Mon sort sera donc exprimé par $\frac{ce}{aa} + \frac{ccef}{a^4} + \frac{c^3eff}{a^6} + \frac{c^4ef^3}{a^8}$ etc. et le sort de mon adversaire par $\frac{b}{a} + \frac{bcf}{a^3} + \frac{bccff}{a^5} + \frac{bc^3f^3}{a^7}$, etc, suites infinies géométriquement proportionnelles dans la raison de aa à cf, dont la première donne pour somme $\frac{ce}{aa-cf}$, et la seconde $\frac{ab}{aa-cf}$; de sorte que mon sort est à celui de mon adversaire, comme ce est à ab, ou en reprenant les valeurs des lettres a, b, c et e, comme 31 est à 30, précisément comme ci-dessus.

APPENDICE.

L'auteur termine ce traité par les cinq problèmes suivans ; mais il ne donne ni analyse, ni démonstration, et il en laisse l'invention et le travail au lecteur. Nous sommes obligés d'y suppléer ici en partie, et de renvoyer le reste au second livre.

PROBLÈME I.

A *et* B *jouent ensemble avec deux dés, et voici la loi du jeu :* A *gagnera la partie s'il amène six points, et* B *s'il en amène sept;* A *commence et joue une fois, après quoi* B *joue deux fois consécutivement, puis* A *reprend et joue deux fois, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'un ou l'autre ait gagné. On demande quel est le rapport du sort de* A *au sort de* B *? je réponds: comme 10355 à 12276.*

Solution. Supposons que le sort de A vaut t lorsqu'il commence à jouer, x lorsque le tour de B est venu, y lorsque B a joué une fois, z lorsque B a joué deux fois, c'est-à-dire, lorsque les dés reviennent à A. Car comme tous ces sorts sont différens et inconnus, que celui qui précède dépend de celui qui suit, et le dernier du premier, ainsi que l'opération va le démontrer, on ne peut, selon ce qui a été remarqué sur la dernière proposition, on ne peut, dis-je, résoudre ce problème, du moins par la méthode de l'auteur, qu'en employant l'analyse algébrique. Maintenant, puisque sur les 36 cas qu'on a avec deux dés, il y en a 5 qui donnent six points

à A et lui font gagner le pari, et 31 qui font passer les dés à B, A aura, au commencement du jeu 5 cas pour obtenir a, ou le dépôt, et 31 cas pour obtenir x, ce qui, par la proposition tant de fois citée, vaut $\frac{5a+31x}{36}$, et comme ce même sort a d'abord été appelé t, on aura $t=\frac{5a+31x}{36}$. En second lieu, le tour de B arrivant, A a 6 cas pour avoir zéro (puisqu'il y a six cas pour 7 points, qui sont favorables à son adversaire), et il a 30 cas pour acquérir y, ce qui lui vaut $\frac{5}{6}y$. Mais c'est ce sort-là même que nous avons précédemment exprimé par x; donc $x=\frac{5}{6}y$. En troisième lieu, lorsque B après le premier jet va passer au second, A, par la même raison, a 6 cas pour o et 30 pour le sort suivant z; et comme alors même il est supposé obtenir y, on aura $y=\frac{5}{6}z$. Enfin les dés revenant à A, ce qui lui donne le sort que nous avons nommé z, il a 5 cas pour amener 6 points et par conséquent pour avoir a, et 31 cas pour ne pas les amener et par conséquent pour avoir son premier sort t; car s'il n'amène pas 6 points, les deux joueurs seront au même état qu'au commencement, puisqu'il restera encore un jet à A, après quoi il devra y en avoir deux pour B, puis deux pour A, et ainsi de suite, précisément comme au commencement du jeu : or il est constant que 5 cas pour a et 31 cas pour t valent $\frac{5a+31t}{36}$; donc $z=\frac{5a+31t}{36}$. Après avoir ainsi trouvé autant d'équations qu'il y a d'inconnues, il faut remonter des dernières aux premières, et substituer la valeur de z tirée de la dernière dans la troisième, pour avoir $y=\frac{25a+155t}{216}$, substituer en-

suite cette valeur dans la seconde, ce qui donne $x = \frac{125a + 775t}{1296}$, et enfin substituer cette dernière valeur dans la première. On aura de cette manière le sort cherché $t = \frac{10355a}{22631}$, et il restera pour le sort de B $\frac{12276a}{22631}$: de sorte que le sort de A sera au sort de B comme 10355 à 12276, ainsi que l'auteur l'a trouvé.

On peut parvenir au même résultat d'une manière un peu plus expéditive, si l'on n'emploie que trois inconnues, t, x et z, en omettant le sort y qui échet à A, après que B a fait son premier jet. En effet, il résulte de ce qui a été remarqué sur la proposition XI en général que le sort de celui qui entreprendrait d'amener une fois sept points en deux jets serait $\frac{11}{36}$ du dépôt; car a nombre de tous les cas est à c, nombre de ceux qui ne donnent pas sept points, comme 6 à 5, et partant $\frac{aa - cc}{aa} = \frac{11}{36}$. Delà il faut conclure, d'après la note 1, qu'il y a 11 cas pour que B venant à jouer amène sept points à l'un de ses deux jets et gagne le pari, et pour que A n'ait rien; et qu'il y a 25 autres cas pour qu'aucun de ses deux jets ne lui donne ce nombre de points, et pour que A reprenant les dés ait le sort z. Ainsi A dont le sort est x, lorsque B vient à jouer, a $\frac{25z}{36}$, de sorte que $x = \frac{25z}{36}$. Et si l'on substitue dans cette équation la valeur de z trouvée ci-dessus, on aura de même $x = \frac{125a + 775t}{1296}$, et par conséquent $t = \frac{10355}{22631}$.

Telle est la méthode de l'auteur. Il convient de la suivre

suivre dans tous les jeux de hasard de la même espèce, où l'on a une suite continuelle de sorts inconnus, pourvu qu'après un certain nombre de jets, on voie reparaître le même état de choses et les mêmes sorts inconnus que les joueurs avaient en commençant. Mais on n'aperçoit pas aussi facilement la manière de traiter les problèmes où cette récurrence n'a pas lieu, mais où l'on trouve toujours des sorts nouveaux et différens des premiers, également inconnus, et cela à l'infini; et c'est ce dont on ne trouve aucun exemple dans le traité de l'auteur. J'en avais proposé quelques-uns dans les ephémérides de France de l'année 1685, art. 25, persuadé que quelqu'un voudrait bien en entreprendre la solution. Mais après l'avoir attendue inutilement pendant cinq ans entiers, je la publiai moi-même dans les actes de Leipsick, du mois de mai 1690; et dès le mois de juillet suivant, l'illustre Leibnitz y consigna d'une manière un peu enveloppée, le principe de solution que je vais exposer maintenant plus à découvert. Je ferai voir d'abord comment ce principe peut servir à résoudre le problème dont il s'agit actuellement; car il ne diffère point de celui que j'ai employé dans les remarques pour la solution du problème précédent, et il s'applique avec la même facilité tant aux questions où les mêmes sorts reviennent circulairement, qu'à celles où cette récurrence n'a pas lieu, avec cette seule différence que dans les premières on parvient à une ou plusieurs séries infinies, dont les sommes peuvent s'exprimer par quelque quantité déterminée, et que dans les autres on arrive à d'autres séries qu'on ne peut pas sommer de la même manière.

Soient une infinité de joueurs à chacun desquels

des jets accordés pour amener le point de 7 pour lequel il y a b cas, vaut constamment 1, et n, nombre de tous les jets depuis et compris le premier, vaut successivement 1, 2, 3, 4, etc. Ces valeurs étant substituées, on a le tableau suivant :

JOUEURS.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.	XIII.	XIV.	XV.
A	*B*	*B*	*A*	*A*	*A*	*B*	*B*	*B*	*B*	*A*	*A*	*A*	*A*	*A*

SORTS.

$\frac{b}{a}. \quad \frac{bc}{aa}. \quad \frac{bcc}{a^3}. \quad \frac{bc^3}{a^4}. \quad \frac{bc^4}{a^5}. \quad \frac{bc^5}{a^6}. \quad \frac{bc^6}{a^7}. \quad \frac{bc^7}{a^8}. \quad \frac{bc^8}{a^9}. \quad \frac{bc^9}{a^{10}}. \quad \frac{bc^{10}}{a^{11}}. \quad \frac{bc^{11}}{a^{12}}. \quad \frac{bc^{12}}{a^{13}}. \quad \frac{bc^{13}}{a^{14}}. \quad \frac{bc^{14}}{a^{15}}.$

Alors je remplace ces joueurs par *A* et *B*, en assignant à chacun les numéros que leur assigne l'état de la question ; enfin je réunis les attentes correspondantes à ces numéros pour avoir les attentes totales de l'un et de l'autre. Ainsi, dans l'exemple IV où *A* doit avoir le premier jet, ensuite le 4e., le 5e. et le 6.e, puis le 11e., le 12e., le 13e., le 14e. et le 15e. et ainsi de suite, je forme une série particulière des attentes des joueurs désignés par ces nombres, et une autre série des attentes du 2e., du 3e., du 7e. et des autres joueurs que *B* remplace, et je trouve de cette manière :

$$\text{sort de } A = \frac{b}{a} + \frac{bc^3}{a^4} + \frac{bc^4}{a^5} + \frac{bc^5}{a^6} + \frac{bc^{10}}{a^{11}} + \frac{bc^{12}}{a^{13}} + \frac{bc^{13}}{a^{14}} + \frac{bc^{14}}{a^{15}} + \text{etc.}$$

$$\text{sort de } B = \frac{bc}{aa} + \frac{bcc}{a^3} + \frac{bc^6}{a^7} + \frac{bc^7}{a^8} + \frac{bc^8}{a^9} + \frac{bc^9}{a^{10}} + \frac{bc^{15}}{a^{16}} + \frac{bc^{16}}{a^{17}} + \frac{bc^{17}}{a^{18}} + \text{etc.}$$

on a en éliminant b, et substituant par-tout $a-c$,

$$\text{sort de } A = 1 - \frac{c}{a} + \frac{c^3}{a^3} - \frac{c^6}{a^6} + \frac{c^{10}}{a^{10}} - \frac{c^{15}}{a^{15}} \text{ etc.}$$

et sort de $B = \frac{c}{a} - \frac{c^3}{a^3} + \frac{c^6}{a^6} - \frac{c^{10}}{a^{10}} + \frac{c^{15}}{a^{15}}$ etc., complément du premier à l'unité.

Voici encore une autre manière de résoudre ces sortes de questions. Je suppose de nouveau, au lieu de *A* et de *B* une infinité de joueurs *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, etc., mais j'attribue à chacun autant de jets consécutifs que l'état de la question en assigne à *A* ou à *B*, toutes les fois qu'il se retrouvent en tour de jouer. Ainsi, dans le quatrième exemple déjà cité, *A* devant jouer une fois, *B* deux fois, puis *A* encore trois fois, *B* quatre fois, etc., je suppose que *A* doit jouer une fois, *B* deux fois, un autre joueur *C* trois fois, un autre *D* quatre fois etc. ; alors je cherche séparément le sort de chacun, eu égard aux nombres des jets attribués tant à lui qu'à tous ceux qui le précèdent, pris collectivement. Ce calcul ne présente aucun embarras, puisque n étant le nombre ceux-là et s le nombre de ceux-ci, nous avons démontré aux remarques sur la proposition XI que le sort de chaque joueur est, en général, $\frac{a^n c^s - c^{n+s}}{a^{n+s}} = \frac{c^s}{a^s} - \frac{c^{n+s}}{a^{n+s}}$. Si donc, dans le 4e. exemple, on prend successivement, au lieu de n, les nombres 1, 2, 3, 4, etc., et pour s les nombres 0, 1, 3, 6, 10, etc., ou les sommes des premiers 1, 2, 3, 4, etc., depuis et compris 1, on aura aussitôt les sorts respectifs des divers joueurs, comme il suit :

Joueurs : *A*. *B*. *C*. *D*. *E*. *F*. *G*.

Sorts : $1 - \frac{c}{a}.\ \frac{c}{a} - \frac{c^3}{a^3}.\ \frac{c^3}{a^3} - \frac{c^6}{a^6}.\ \frac{c^6}{a^6} - \frac{c^{10}}{a^{10}}.\ \frac{c^{10}}{a^{10}} - \frac{c^{15}}{a^{15}}.\ \frac{c^{15}}{a^{15}} - \frac{c^{21}}{a^{21}}.\ \frac{c^{21}}{a^{21}} - \frac{c^{28}}{a^{28}}$,

Alors il ne reste plus qu'à réunir en une seule somme les attentes des joueurs *A*, *C*, *E*, *G*, etc., de rang

impair ; et en une autre celles des joueurs *B*, *D*, *F*, de rang pair, pour avoir les attentes respectives de *A* et de *B*, jouant alternativement, lesquelles sont visiblement égales à ces sommes. L'opération serait la même si la question supposait trois, quatre ou un plus grand nombre de joueurs.

Chacune de ces méthodes est également applicable aux trois autres exemples de ces sortes de questions. Si, pour abréger, on fait $m = \frac{c}{a}$, on aura pour les quatre exemples, les solutions, que voici :

EXEMPLES. I.	SORT DE	$A = 1 - m + m^{2} - m^{4} + m^{5} - m^{8} + m^{9} - m^{13} + m^{14} - m^{19} + \text{etc.}$
		$B = + m - m^{2} + m^{4} - m^{5} + m^{8} - m^{9} + m^{13} - m \quad + m^{19} - \text{etc}$
II.		$A = 1 - m^{2} + m^{2} - m^{3} + m^{5} - m^{6} + m^{9} - m^{10} + m^{14} - m^{15} + \text{etc.}$
		$B = + m - m^{2} + m^{3} - m^{5} + m^{6} - m_{9} + m^{10} - m^{14} + m^{15} - \text{etc.}$
III.		$A = 1 - m + m^{2} - m^{4} + m^{6} - m^{9} + m^{12} - m^{16} + m^{20} - m^{25} + \text{etc.}$
		$B = + m - m^{2} + m^{4} - m^{6} + m^{9} - m^{12} + m^{16} - m^{20} + m^{25} - \text{etc.}$
IV.		$A = 1 - m + m^{3} - m^{6} + m^{10} - m^{15} + m^{21} - m^{28} + m^{36} - m^{45} + \text{etc.}$
		$B = + m - m^{3} + m^{6} - m^{10} + m^{15} - m^{21} + m^{28} - m^{36} + m^{45} - \text{etc.}$

Chacun de ces sorts est exprimé, comme on voit, par une série infinie, où les signes + et − alternent perpétuellement et dont les termes sont tirés de la proportion continue $\div 1 : m : m^{2} : m^{4} : m^{5}$, etc, par sauts inégaux, ce qui empêche qu'on ne puisse en avoir exactement la somme; mais il est facile d'en approcher, en nombres, aussi près qu'on veut. Ainsi, en supposant $a = 36$, nombre de tous les cas que donnent deux dés, $c = 30$, nombre des cas contraires au point de 7 qu'il s'agit d'amener, et partant $\frac{c}{a}$ ou $m = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$, on trouve, à moins d'un cent millième près, pour le sort de *A*, dans le pre-

mier exemple $\frac{71931}{100000}$, dans le second $\frac{40058}{100000}$, dans le troisième $\frac{59679}{100000}$, et dans le quatrième $\frac{52392}{100000}$, par-tout à moins d'un cent millième près, d'où il suit que le sort de *A* est au sort de *B* dans le premier comme 71931 à 28069, dans le second comme 40058 à 59942, dans le troisième comme 59679 à 40321, et dans le quatrième comme 52392 à 47608.

Au reste si l'on examine les exposans des puissances de m qui constituent les termes de ces séries, on s'apercevra qu'ils sont par-tout relatifs aux nombres mêmes des jets que l'état de la question assigne à *A* et à *B* alternativement : ainsi, dans la première série, $1-m+m^2-m^4+m^5-m^8+m^9$ etc., les exposans sont successivement 0, 1, 2, 4, 5, 8, 9 etc., et leurs différences 1, 1, 2, 1, 3, 1 etc. répondent précisément aux nombres des jets que requiert l'hypothèse de la première question, puisqu'elle attribue, par ordre, 1 jet à *A*, 1 à *B*, 2 à *A*, 1 à *B*, 3 à *A*, 1 à *B*, etc. Observez que cette loi est tellement générale qu'elle a lieu même dans les exemples où les nombres de jets alternativement accordés à deux joueurs sont pris au hasard, sans avoir entre eux aucun rapport constant et déterminé; considération qui nous fournit la règle suivante, pour trouver en un moment les sorts de ces joueurs.

RÈGLE

Pour connaître les sorts de deux antagonistes jouant jusqu'à ce que l'un ou l'autre gagne le pari, lorsque chacun à son tour a plusieurs jets consécutifs, désignés par des nombres donnés quelconques et continués à l'infini.

Je suppose que pour tous les jets les nombres des cas sont les mêmes, ou que la valeur de la quantité $\frac{c}{a}$ *ou* m *est constante.*

Ecrivez, par ordre, d'abord les nombres donnés des jets accordés à chacun des deux joueurs, ensuite les sommes de ces nombres depuis et compris le premier; alors prenez ces sommes pour les exposans d'autant de puissances de la quantité *m* que vous ferez précéder alternativement des signes + et −: ces puissances vous donneront l'attente du premier joueur; et si vous en retranchez l'unité et que vous en changiez tous les signes, vous aurez l'attente de son adversaire.

Par exemple, si *A* doit jouer 3 fois consécutives, *B* 1 fois, *A* 4 fois, *B* 1 fois, *A* 5 fois, *B* 9 fois, et ainsi de suite à l'infini, en suivant si l'on veut les nombres cyclométriques de Ludolph, dont la progression n'a aucune loi déterminée, les nombres des jets seront successivement . . 3 1 4 1 5 9 2 6 5 etc., et leurs sommes depuis et compris le 1er. . . 0, 3, 4, 8, 9, 14, 23, 25, 31, 36 etc. et partant,

Sort de $A = 1 - m^3 + m^4 - m^8 + m^9 - m^{14} + m^{23} - m^{25} + m^{31} - m^{36} + \text{etc.}$

Sort de $B = + m^3 - m^4 + m^8 - m^9 + m^{14} - m^{23} + m^{25} - m^{31} + m^{36} - \text{etc.}$

Observez que si le nombre des jets a une limite au-delà

delà de laquelle le jeu ne puisse être continué, quoiqu'aucun des joueurs n'ait gagné le pari, la même règle a encore lieu, à cela près que le dernier terme dont l'exposant est égal à la somme de tous les jets, doit être rejeté, comme rédondant, de celle des séries où il a le signe +; de sorte que les attentes des deux joueurs, prises ensemble, sont plus petites que l'unité de toute la valeur de ce terme. Ainsi, dans l'exemple précédent, s'il fallait s'arrêter après le 5 posé en dernier lieu, c'est-à-dire, après le 36e. jet, on aurait

sort de $A = 1 - m^3 + m^4 - m^8 + m^9 - m^{14} + m^{23} - m^{25} + m^{31} - m^{36}$,

sort de $B = + m^3 - m^4 + m^8 - m^9 + m^{14} - m^{23} + m^{25} - m^{31}$;

Et partant sort de A + sort de $B = 1 - m^{36}$.

PROBLEME II.

Trois joueurs A, B *et* C, *prennent 12 jetons, 4 blancs et 8 noirs, et jouent à cette condition: celui qui, les yeux voilés, amènera le premier un jeton blanc gagnera le pari:* A *tire le premier,* B *le second,* C *le troisième, puis* A *recommence et ainsi de suite alternativement. On demande en quel rapport seront leurs sorts respectifs.*

Le sens de ce problème est ambigu, ce qui donne lieu à plusieurs solutions différentes. Car on peut supposer que les jetons qui sortent sont remis dans l'urne avant le tirage suivant, et que le nombre en reste toujours le même; ou qu'ils n'y sont pas remis, de sorte que leur nombre décroisse continuellement: on peut supposer d'ailleurs que chacun des joueurs a 12 jetons, ou que les trois joueurs en ont 12 en commun.

L

Si les jetons sortis doivent rentrer dans l'urne à chaque tirage, il est indifférent que chacun des joueurs en ait douze, ou qu'ils en ayent douze en commun; et voici comment on peut trouver leurs sorts respectifs.

1. *Par la méthode de l'auteur.* Soient x le sort du premier, y le sort du second, et z celui du troisième. Lorsque le premier, ou *A*, commence le jeu, il a, à cause des 4 jetons blancs, 4 cas pour gagner le pari, ou pour avoir le dépôt, et, à cause des 8 jetons noirs, il a 8 cas pour perdre sa primauté, et passer à l'état du troisième, et partant pour acquérir le sort z, ce qui vaut $\frac{4+8z}{12} = \frac{1+2z}{3}$; ainsi, le sort du 1er., $x = \frac{1+2z}{3}$. Par la même raison, lorsque le premier ouvre le jeu, le second, ou *B*, a 4 cas pour retirer o, et 8 cas pour acquérir la primauté, et la condition du premier, ou le sort x, ce qui vaut $\frac{8}{12}x = \frac{2}{3}x$; ainsi, le sort du second, $y = \frac{2}{3}x$. De même encore le troisième, ou *C*, a, au commencement, 4 cas pour o, et 8 cas pour avoir le second rang, ou le sort du second joueur y; ce qui vaut $\frac{2}{3}y$; c'est pourquoi le sort du troisième, $z = \frac{2}{3}y$, d'où l'on tire $y = \frac{3}{2}z$: et comme on a aussi trouvé $y = \frac{2}{3}x$, on a $\frac{3}{2}z = \frac{2}{3}x$; c'est-à-dire, $z = \frac{4}{9}x$. Cette valeur de z, substituée dans la première équation $x = \frac{1+2z}{3}$, donne $x = \frac{1}{3} + \frac{8}{27}x$, ou $x = \frac{9}{19}$. Donc y $(= \frac{2}{3}x) = \frac{6}{19}$ et z $(= \frac{2}{3}y) = \frac{4}{19}$: et partant $x : y : z :: 9 : 6 : 4$.

2. *Par notre méthode.* Soient en général a le nombre de tous les jetons, b le nombre des jetons blancs, c celui des jetons noirs; et supposons encore la loi du jeu restant la même, une infinité de joueurs tirant de l'urne et y remettant un jeton l'un après

l'autre. Comme le nombre des jetons blancs et celui des jetons noirs sont constamment les mêmes à tous les tirages, le coroll. 1 de la règle annexée aux remarques sur la prop. XII, nous donnera les attentes des divers joueurs, comme il suit :

JOUEURS.

I. II. III. IV. V. VI. VII. VIII. IX. X. XI. XII. XIII. XIV. XV. etc.

A B C A B C A B C A B C A B C etc.

ATTENTES.

$$\frac{b}{a}.\ \frac{bc}{aa}.\ \frac{bcc}{a}.\ \frac{bc^3}{a^4}.\ \frac{bc^4}{a^5}.\ \frac{bc^5}{a^6}.\ \frac{bc^6}{a^7}.\ \frac{bc^7}{a^8}.\ \frac{bc^8}{a^9}.\ \frac{bc^9}{a^{10}}.\ \frac{bc^{10}}{a^{11}}.\ \frac{bc^{11}}{a^{12}}.\ \frac{bc^{12}}{a^{13}}.\ \frac{bc^{13}}{a^{14}}.\ \frac{bc^{14}}{a^{15}} \text{ etc.}$$

Ainsi, l'hypothèse assignant le 1er., le 4e., le 7e., le 10e., etc. tirages à *A*; le 2e., le 5e., le 8e., le 11.e, etc., à *B*; le 3e., le 6e., le 9e., le 12e., etc., à *C*; si l'on ajoute ensemble les attentes respectivement correspondantes à ces numéros, on aura l'attente de

$$\left.\begin{array}{l} A=\frac{b}{a}+\frac{bc^3}{a^4}+\frac{bc^6}{a^7}+\frac{bc_9}{a^{10}}+\frac{bc^{12}}{a^{13}} \text{ etc.} \\ B=\frac{bc}{aa}+\frac{bc^4}{a^5}+\frac{bc^7}{a^8}+\frac{bc^{10}}{a^{11}}+\frac{bc^{13}}{a^{14}} \text{ etc.} \\ C=\frac{bcc}{a^3}+\frac{bc^5}{a^6}+\frac{bc^8}{a^9}+\frac{bc}{a^{12}}+\frac{bc_1}{a^{15}} \text{ etc.} \end{array}\right\} \text{A cause de la prog. géométrique} \left\{\begin{array}{l} =\frac{aab}{a^3-c^3} \\ =\frac{abc}{a^3-c^3} \\ =\frac{bcc}{a^3-c^3} \end{array}\right.$$

D'où il suit que les trois sorts sont :: $aa : ac : cc$; c'est-à-dire ici (à cause de $a : c$ :: 12 : 8 :: 3 : 2), :: 9 : 6 : 4, de même que ci-dessus. Remarquez que si la question supposait 4 joueurs, on trouverait, de la même manière, que leurs sorts seraient : $a^3 : acc : c^3$, et si, en général, elle en supposait n, :: $a^{n-1} : a^{n-2}\, c : a^{n-3}\, cc$, etc., et ainsi de suite, dans la raison constante de $a : c$.

II. Que si le sens du problème est que les trois joueurs ayant les douze jetons en commun, les jetons sortis de l'urne n'y rentrent pas, il faut observer que si, par la sortie successive des jetons noirs, le premier joueur prend la place du troisième, le troisième celle du second, et le second celle du premier; il ne s'ensuit pas de-là qu'ils fassent entre eux l'échange des sorts qu'ils avaient au commencement du jeu, comme dans l'hypothèse précédente; car le nombre des jetons de l'urne variant continuellement, ils acquièrent des sorts nouveaux, et tout différens des premiers, et d'autant plus simples, qu'il est sorti plus de jetons noirs : de sorte que les derniers se trouvent totalement connus. Ainsi, en commençant, selon la méthode de l'auteur, par les plus simples de tous, et remontant de proche en proche, on arrive enfin, par le seul secours de la synthèse, au cas proposé.

Supposons donc qu'il soit déjà sorti sept jetons noirs, et qu'ainsi le prochain tirage soit à *B*; alors le premier joueur, *A*, n'aura plus rien à attendre; car, comme il ne reste plus qu'un jeton noir, il faudra que l'un des deux autres, soit *A* ou *B*, amène un jeton blanc et gagne le pari. Mais, à cause des 4 jetons blancs, le second joueur, *B*, aura 4 cas pour gagner, et à cause du jeton noir qui reste, il aura un cas pour perdre, puisque, s'il l'amène, le troisième joueur, *C*, ne pourra manquer de gagner. Par la même raison, *C* aura 4 cas pour perdre, et 1 cas pour gagner. Ainsi, les sorts des trois joueurs *A*, *B*, *C*, sont 0, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{5}$.

Supposons, en second lieu, qu'il soit sorti six jetons noirs; alors c'est à *A* de tirer; il a 4 cas pour gagner, et les deux autres en ont autant pour per-

dre ; et comme il reste 2 jetons noirs, chacun des trois joueurs a deux cas pour avoir le même sort que lorsqu'il n'en reste qu'un, puisqu'il n'en reste qu'un, si *A* amène un jeton noir, et que le prochain tirage appartient à *B*, ce qui est le cas de l'hypothèse précédente. Les trois sorts sont donc alors $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{1}{15}$.

Imaginons maintenant qu'il soit sorti cinq jetons noirs. Alors, *C*, qui est en tour, à 4 cas pour gagner, et chacun des deux autres a 4 cas pour perdre ; et comme il reste 3 jetons noirs, chacun des trois joueurs a aussi trois cas pour avoir le même sort que lorsqu'il en reste 2 : donc leurs sorts deviennent $\frac{2}{7}$ $\frac{4}{35}$, $\frac{3}{5}$.

Concevons encore qu'il soit sorti 4 jetons noirs, et par conséquent qu'il reste autant de jetons noirs que de jetons blancs. *B*, qui est en tour, a pour lui, et les deux autres ont contre eux la moitié des cas ; l'autre moitié met chacun des trois joueurs au même état que lorsqu'il reste trois jetons noirs : ainsi les sorts sont $\frac{1}{7}$, $\frac{39}{70}$, $\frac{3}{10}$.

En procédant de la même manière, on trouve que les sorts des trois joueurs sont $\frac{11}{21}$, $\frac{13}{42}$, $\frac{1}{6}$, s'il est sorti trois jetons noirs ; $\frac{11}{35}$, $\frac{13}{70}$, $\frac{1}{2}$, s'il en est sorti deux ; $\frac{1}{5}$, $\frac{53}{110}$, $\frac{7}{22}$, s'il en est sorti un.

Enfin, s'il n'est encore sorti aucun jeton de l'urne, et c'est le cas dont il s'agit et pour lequel il a fallu d'abord calculer tous les autres, on trouvera, par la même méthode, pour les sorts de *A*, *B*, *C*, $\frac{7}{15}$, $\frac{53}{165}$, $\frac{7}{33}$, ou, en les réduisant au même dénominateur, $\frac{77}{165}$, $\frac{53}{165}$, $\frac{35}{165}$; de sorte que les sorts des trois joueurs sont : : 77 : 53 : 35.

Au surplus, la méthode qui nous est familière, reçoit encore ici son application ; car elle n'est pas plus

etrangère aux questions qui se résolvent par la pure synthèse, qu'à celles pour lesquelles il faut recourir à l'analyse. Puisqu'il y a huit jetons noirs qui ne rentreront pas dans l'urne s'ils en sortent, je suppose neuf joueurs, devant tirer chacun un jeton. Dans cette hypothèse, il faudra nécessairement que l'un des joueurs amène un jeton blanc et gagne le pari; mais aucun ne pourra avoir l'espoir de gagner, que chacun de ceux qui le précèdent n'ait amené un jeton noir. Je suppose donc que le nombre de ces jetons, qui est en proportion avec celui des cas, diminue graduellement, et qu'après le premier tirage, il reste 7 jetons noirs, qu'il en reste 6 après le second, cinq après le troisième, et ainsi de suite; et par la règle annexée à la prop. XII, je détermine le sort de chaque joueur, comme on le voit au tableau suivant:

Joueurs	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
	A	*B*	*C*	*A*	*B*	*C*
No[bre]. *des jet. a*	12	11	10	9	8	7
Blancs b	4	4	4	4	4	4
Noirs c	8	7	6	5	4	3
Sorts	$\frac{4}{12}$.	$\frac{4.8}{11.12}$.	$\frac{4.7.8}{10.11.12}$.	$\frac{4.6.7.8}{9.10...12}$.	$\frac{4.5.6...8}{8.9.10...12}$.	$\frac{4.4.5...8}{7.8.9...12}$.

Joueurs	VII.	VIII.	IX.
	A	*B*	*C*
No[bre]. *des jet. a*	6	5	4
Blancs. b	4	4	4
Noirs c	2	1	0
Sorts	$\frac{4.3.4...8}{6.7.8...12}$.	$\frac{4.2.3...8}{5.6.7...12}$.	$\frac{4.1.2...8}{4.5.6...12}$

Alors; comme le 1er., le 4e. et le 7e. tirages appartiennent à *A*; le 2e., le 5e. et le 8e. à *B*; le 3e., le 6e. et le 9e. à *C*, j'additionne ensemble les sorts des joueurs désignés par ces nombres, et je trouve pour l'attente de *A*, $\frac{4}{12} + \frac{4.6.7.8}{9.10.11.12} + \frac{4.3.4.5.6.7.8}{6.7.8.9.10.11.12}$; pour celle de *B*, $\frac{4.8}{11.12} + \frac{4.5.6.7.8}{8.9.10.11.12} + \frac{4.2.3.4.5.6.7.8.}{5.6.7.8.9.10.11.12}$; et pour celle de *C*, $\frac{4.7.8}{10.11.12} + \frac{4.4.5.6.7.8}{7.8.9.10.11.12} + \frac{4.1.2.3.4.5.6.7.8}{4.5.6.7.8.9.10.11.12}$. Si l'on réduit toutes ces fractions au dénominateur commun 5.6.7.8.9.10.11.12, les numérateurs donnent $4.5.6.7.8.9.10.11 + 4.5.6.7.8.6.7.8 + 4.5.3.4.5.6.7.8 = 4.5.6.7.8 \times \overline{3.4.5 + 6.7.8 + 9.10.11.}$, $4.5.6.7.8.8.9.10 + 4.5.6.7.8.5.6.7 + 4.2.3.4.5.6.7.8 = 4.5.6.7.8 \times \overline{2.3.4 + 5.6.7 + 8.9.10}$, $4.5.6.7.8.9.7.8 + 4.5.6.4.5.6.7.8 + 1.2.3.4.5.6.7.8 = 4.5.6.7.8 \times \overline{1.2.3 + 4.5.6 + 7.8.9}$; d'où, chassant le facteur commun 4.5.6.7.8, on trouve que les trois sorts sont respectivement $:: 3.4.5 + 6.7.8 + 9.10.11 : 2.3.4 + 5.6.7 + 8.9.10 : 1.2.3 + 4.5.6 + 7.8.9$, ou en divisant par 6 $:: 10 + 56 + 165 = 231 : 4 + 35 + 120 = 159 : 1 + 20 + 84 = 105$, et en divisant encore par 3 $:: 77 : 53 : 35$, comme ci-dessus. Et comme nous apercevons une loi certaine dans la progression de ces nombres, nous pourrions aisément donner une règle générale, pour un nombre quelconque de joueurs et de jetons, s'il était assez important de s'arrêter encore sur ce sujet.

III. Si l'on prend le problème dans le troisième sens, c'est-à-dire, si l'on suppose que chaque joueur ait douze jetons dans une urne particulière, et qu'ils retirent ces jetons un à un, chacun de son urne, et

tour à tour, on aura une hypothèse qui ne différera guères de la précédente, qu'en ce que le nombre des jetons étant augmenté, l'opération deviendra beaucoup plus prolixe.

Supposons d'abord qu'il ne reste plus de jetons noirs à *A* ni à *B*, mais qu'il en reste encore un à *C*, qui alors est en tour. *C*, ayant quatre jetons blancs et un jeton noir, a quatre cas pour gagner, et un cas pour perdre; car, s'il amène le jeton noir, *A*, qui n'a plus que des jetons blancs, ne pourra manquer de gagner; mais, par la même raison, *A* a 4 cas pour gagner, et un cas pour perdre, et il ne reste absolument rien à *B*, puisque l'un des deux autres gagnera infailliblement : donc, les sorts de *A*, *B*, *C* sont $\frac{1}{5}$, o, $\frac{4}{5}$.

Supposons ensuite que *A* n'ait plus de jetons noirs, et qu'il en reste 1 à chacun des deux autres. En cet état *B*, qui va jouer, à 4 cas pour gagner, et les deux autres en ont autant pour perdre; et il y a un cas où le sort de chacun des trois joueurs est le même que dans l'hypothèse précédente, ce qui vaut à *A*, *B*, *C*, $\frac{1}{25}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{4}{25}$.

Supposons maintenant que *A*, *B*, *C* ayent encore chacun 1 jeton noir. Alors *A*, qui est en tour, à 4 cas pour gagner, et les deux autres en ont autant pour perdre, et chacun des trois a un cas pour le sort précédent. Les trois sorts sont donc $\frac{101}{125}$, $\frac{4}{25}$, $\frac{4}{125}$ dont le rapport est 101 : 20 : 4.

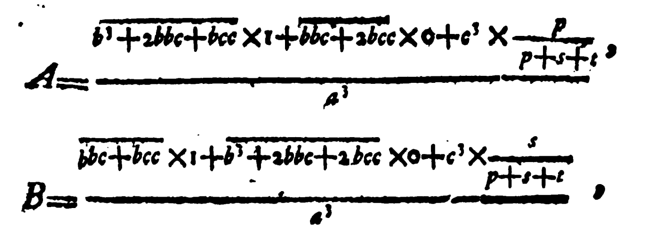
Il faudrait continuer et chercher de la même manière quels seraient les sorts de *A*, *B*, *C*, lorsqu'il leur resterait 1.1.2, 1.2.2, 2.2.2, 2.2.3, 2.3.3, 3.3.3, etc. jetons noirs, jusqu'à ce qu'on arrivât au cas proposé, celui où le nombre des jetons noirs est supposé de

de 8 pour chacun des joueurs. Mais comme le détail de cette recherche serait excessivement ennuyeux, je vais montrer comment on peut parvenir par sauts à la solution du problème, en déterminant les sorts pour les cas seulement où il reste à chacun des joueurs un même nombre de jetons noirs : nombre que nous ferons toujours $=c$, comme nous ferons celui des jetons blancs $=b$ et celui de tous les jetons $=a=b+c$.

Il faut d'abord considérer toutes les variations qui peuvent avoir lieu, lorsque chacun des joueurs tire un jeton de son urne. Or il est clair qu'il peut arriver ou que tous trois amènent un jeton blanc, ou qu'il n'y en ait que deux qui amènent un jeton de cette couleur, ou qu'il n'y en ait qu'un, ou qu'il n'y en ait aucun. Il faut examiner ensuite combien de cas répondent à chacune de ces variations; et voici comment on peut en découvrir le nombre : si quelqu'un pariait que chacun des trois joueurs amènerait un jeton blanc, son sort serait $\frac{b^3}{a^3}$; s'il pariait que deux d'entr'eux, A et B, ou A et C, ou B et C amèneraient un jeton blanc et l'autre un jeton noir, son sort serait $\frac{bbc}{a^3}$; s'il pariait que l'un des trois A, B ou C amènerait un jeton blanc, et chacun des deux autres un jeton noir, il aurait pour sort $\frac{bcc}{a^3}$; enfin, s'il pariait qu'aucun des trois n'amènerait un jeton blanc, son sort serait $\frac{c^3}{a}$. Tout cela résulte évidemment du premier corollaire de la règle annexée à la proposition XII, puisque l'état de la question est le même que si le nombre des cas étant constant, quelqu'un pariait d'amener, en trois épreuves, un hasard

quelconque, trois fois, ou deux fois, ou une fois, ni plus ni moins. Maintenant si, d'après la note I sur la proposition XI, on rejette le dénominateur commun des fractions qu'on vient de trouver, les numérateurs exprimeront les nombres des cas où chacun de ces évènemens peut arriver.

Il faut observer enfin que, suivant les conditions du problème, *A* ne peut manquer de gagner, soit qu'il amène lui seul un jeton blanc, soit qu'il amène un pareil jeton avec *B* ou *C*, soit qu'il l'amène avec *B* et *C*; que *B* gagne infailliblement s'il amène un jeton de cette couleur lui seul, ou avec *C*, et que *C* ne peut gagner s'il ne l'amène seul; mais que si aucun des trois n'amène un jeton blanc, alors chacun d'eux parvient au sort qui a été trouvé pour le cas où il y a un jeton noir de moins dans chacune des urnes. Ainsi en additionnant d'une part les cas favorables à chacun des joueurs, de l'autre, les cas contraires, nous trouvons que *A* a $b^3+2bbc+bcc$ cas pour gagner ou pour obtenir le dépôt 1, et $bbc+2bcc$ cas pour perdre, que *B* en a $bbc+bcc$ pour gagner, et $b^3+2bbc+2bcc$ pour perdre, et que *C* en a bcc pour gagner et $b^3+3bbc+2bcc$ pour perdre; mais qu'il y a c^3 cas dans lesquels chacun des trois a le sort précédemment trouvé; et si l'on appelle ces sorts $\frac{p}{p+s+t}$, $\frac{s}{p+s+t}$, $\frac{t}{p+s+t}$, on trouvera, par la proposition III, l'attente de



$$A = \frac{\overline{b^3+2bbc+bcc}\times 1+\overline{bbc+2bcc}\times 0+c^3\times\frac{p}{p+s+t}}{a^3},$$

$$B = \frac{\overline{bbc+bcc}\times 1+\overline{b^3+2bbc+2bcc}\times 0+c^3\times\frac{s}{p+s+t}}{a^3},$$

$$C = \frac{bcc \times 1 + \overline{b^3 + 3bbc + 2bcc} \times 0 + c^3 \times \frac{t}{p+s+t}}{a^3};$$

de sorte que si l'on supprime le dénominateur commun et qu'on fasse la multiplication par $\frac{p+s+t}{c^3}$, on trouvera que les sorts de A, B, C sont respectivement comme

$$\left.\begin{array}{r} \overline{b^3 + 2bbc + bcc} \\ \overline{bbc + bcc} \\ bcc \end{array}\right\} \times \frac{p+s+t}{c^3} \left\{\begin{array}{l} +p. \\ +s. \\ +t. \end{array}\right.$$

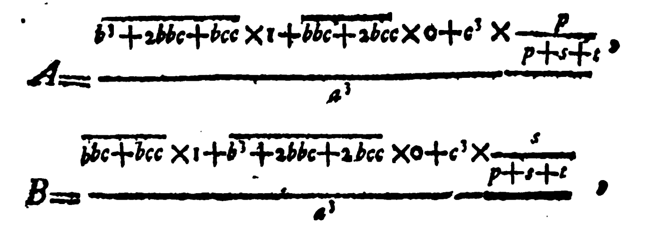
Cela entendu, revenons à la solution de notre problème, et supposons qu'il reste à chacun des joueurs deux jetons noirs. Alors les lettres b et c vaudront 4 et 2, auxquels on pourra substituer les plus petits nombres dans le même rapport, savoir, 2 et 1; et comme dans le cas précédent, où il ne restait à chacun des joueurs qu'un jeton noir, la raison des sorts que nous indiquons par les lettres p, s, t, a été exprimée par les nombres 101, 20, 4, dont la somme, $p+s+t=125$, il est aisé de trouver, par la formule ci-dessus, les nombres 2351, 770, 254, qui désignent la raison des sorts des trois joueurs dans le cas présent.

De même si l'on suppose qu'il reste à chacun des joueurs trois jetons noirs, auquel cas les lettres b et c valent 4 et 3, et les lettres p, s, t les nombres même qu'on vient de déterminer, savoir, 2351, 770, 254, on trouvera, pour exprimer la raison des sorts, les nombres 26851, 11270, 4754.

S'il reste à chacun 4 jetons noirs, de sorte que les valeurs des lettres b et c soient 4 et 4, ou, en moindres termes, 1 et 1, les sorts se trouveront être res-

quelconque, trois fois, ou deux fois, ou une fois, ni plus ni moins. Maintenant si, d'après la note I sur la proposition XI, on rejette le dénominateur commun des fractions qu'on vient de trouver, les numérateurs exprimeront les nombres des cas où chacun de ces évènemens peut arriver.

Il faut observer enfin que, suivant les conditions du problème, A ne peut manquer de gagner, soit qu'il amène lui seul un jeton blanc, soit qu'il amène un pareil jeton avec B ou C, soit qu'il l'amène avec B et C; que B gagne infailliblement s'il amène un jeton de cette couleur lui seul, ou avec C, et que C ne peut gagner s'il ne l'amène seul; mais que si aucun des trois n'amène un jeton blanc, alors chacun d'eux parvient au sort qui a été trouvé pour le cas où il y a un jeton noir de moins dans chacune des urnes. Ainsi en additionnant d'une part les cas favorables à chacun des joueurs, de l'autre, les cas contraires, nous trouvons que A a $b^3+2bbc+bcc$ cas pour gagner ou pour obtenir le dépôt 1, et $bbc+2bcc$ cas pour perdre, que B en a $bbc+bcc$ pour gagner, et $b^3+2bbc+2bcc$ pour perdre, et que C en a bcc pour gagner et $b^3+3bbc+2bcc$ pour perdre; mais qu'il y a c^3 cas dans lesquels chacun des trois a le sort précédemment trouvé; et si l'on appelle ces sorts $\frac{p}{p+s+t}$, $\frac{s}{p+s+t}$, $\frac{t}{p+s+t}$, on trouvera, par la proposition III, l'attente de



$$A = \frac{\overline{b^3+2bbc+bcc}\times 1+\overline{bbc+2bcc}\times 0+c^3\times\frac{p}{p+s+t}}{a^3},$$

$$B = \frac{\overline{bbc+bcc}\times 1+\overline{b^3+2bbc+2bcc}\times 0+c^3\times\frac{s}{p+s+t}}{a^3},$$

$$C = \frac{bcc \times 1 + \overline{b^3 + 3bbc + 2bcc} \times 0 + c^3 \times \frac{t}{p+s+t}}{a^3};$$

de sorte que si l'on supprime le dénominateur commun et qu'on fasse la multiplication par $\frac{p+s+t}{c^3}$, on trouvera que les sorts de A, B, C sont respectivement comme

$$\left.\begin{array}{r} \overline{b^3 + 2bbc + bcc} \\ \overline{bbc + bcc} \\ bcc \end{array}\right\} \times \frac{p+s+t}{c^3} \left\{\begin{array}{l} +p. \\ +s. \\ +t. \end{array}\right.$$

Cela entendu, revenons à la solution de notre problème, et supposons qu'il reste à chacun des joueurs deux jetons noirs. Alors les lettres b et c vaudront 4 et 2, auxquels on pourra substituer les plus petits nombres dans le même rapport, savoir, 2 et 1; et comme dans le cas précédent, où il ne restait à chacun des joueurs qu'un jeton noir, la raison des sorts que nous indiquons par les lettres p, s, t, a été exprimée par les nombres 101, 20, 4, dont la somme, $p+s+t=125$, il est aisé de trouver, par la formule ci-dessus, les nombres 2351, 770, 254, qui désignent la raison des sorts des trois joueurs dans le cas présent.

De même si l'on suppose qu'il reste à chacun des joueurs trois jetons noirs, auquel cas les lettres b et c valent 4 et 3, et les lettres p, s, t les nombres même qu'on vient de déterminer, savoir, 2351, 770, 254, on trouvera, pour exprimer la raison des sorts, les nombres 26851, 11270, 4754.

S'il reste à chacun 4 jetons noirs, de sorte que les valeurs des lettres b et c soient 4 et 4, ou, en moindres termes, 1 et 1, les sorts se trouveront être res-

pectivement comme les nombres 198351, 97020, 47629.

S'il reste à chacun 5 jetons noirs, c'est-à-dire, si *b* et *c* valent 4 et 5, on a la raison des sorts dans les nombres 1087407, 590940, 322029, ou, en divisant par 9, dans les nombres 120823, 65660, 35781.

S'il reste à chacun 6 jetons noirs et qu'ainsi les valeurs des lettres *b* et *c* soient 4 et 6, ou 2 et 3, les sorts respectifs seront dans la raison des nombres 532423, 312620, 183957.

S'il reste encore à chacun 7 jetons noirs, de sorte que les valeurs des lettres *b* et *c* soient 4 et 7, les sorts seront comme les nombres 1984423, 1236620, 771957.

Enfin, si le tirage n'est pas encore commencé et que tous les jetons noirs soient encore dans les urnes, qu'ainsi les valeurs des lettres *b* et *c* soient 4 et 8, ou 1 et 2, ce qui est le cas proposé, pour lequel il nous a fallu d'abord expédier tous les précédens, nous trouvons que la raison cherchée des sorts des trois joueurs *A*, *B*, *C* est désignée par les nombres 6476548, 4231370, 2768457.

Le lecteur peut, s'il le juge à propos, faire l'application de notre méthode ordinaire à cette hypothèse: nous ne croyons pas devoir nous y arrêter.

PROBLÈME IIIe.

A *parie avec* B *que sur 40 cartes à jouer, 10 de chaque espèce ou couleur, il en tirera 4, telles qu'il y en ait une de chaque espèce. Et il se trouve que le sort de* A *est au sort de* B, *comme 1000 à 8139.*

Solution. Supposez d'abord que *A* ait déjà tiré 3 cartes de trois différentes couleurs, il en restera 9 de chacune de ces couleurs, 27 des trois ensemble, et 10 de la quatrième. Ainsi, il est constant qu'en tirant la quatrième carte, *A* aura 27 cas pour perdre et 10 pour gagner, ce qui lui vaudra $\frac{10}{37}$ du dépôt.

Supposez ensuite que *A* ait tiré 2 cartes de couleurs différentes, il en restera 18 de ces deux couleurs et 20 des deux autres. Donc, en passant au troisième tirage, il a 18 cas pour perdre et 20 pour avoir 3 cartes de trois différentes couleurs, c'est-à-dire, pour avoir le sort précédent, $\frac{10}{37}$, ce qui lui donne pour sort actuel $\frac{100}{703}$.

Supposez en troisième lieu que *A* ait tiré une carte seulement : il en restera 9 de la couleur de cette carte et 30 des trois autres; et partant *A*, en tirant la seconde carte, a 9 cas pour perdre, et 30 cas pour avoir une carte d'une autre couleur, c'est-à-dire, pour acquérir le sort qu'on vient de trouver, $\frac{100}{703}$, ce qui lui vaut $\frac{1000}{9139}$.

Si *A* n'a encore tiré aucune carte, son sort, lorsqu'il va tirer la première, est le même que le précédent, et continue d'être $\frac{1000}{9139}$, puisque la totalité des 40 cas le met nécessairement dans l'état que

suppose l'hypothèse précédente. Le sort de son adversaire est donc $\frac{8139}{9139}$, et le sort de *A* est au sort de *B*, comme 1000 à 8139, ainsi que l'auteur l'a trouvé.

Le même problème peut encore se résoudre autrement par les principes des combinaisons, comme nous le ferons voir dans la IIIe. partie, après avoir exposé cette théorie.

PROBLÈME IVe.

A prend douze jetons, 4 blancs et 8 noirs, comme ci-dessus, et il parie avec B *que, les yeux voilés, il en tirera 7, dont trois seront blancs. On demande quel est le rapport du sort de* A *au sort de* B.

Nous sommes forcés de renvoyer encore ce problème à la IIIe. partie de cet ouvrage, parce qu'il ne paraît pas qu'on puisse le résoudre sans connaître la théorie des combinaisons.

PROBLÈME Ve.

A *et* B *prennent chacun 12 écus et jouent avec trois dés aux conditions suivantes : s'il vient 11 points,* A *donnera un écu à* B*; mais s'il en vient 14,* B *donnera un écu à* A*; et celui qui le premier aura réuni tous les écus gagnera la partie. Il se trouve que le sort de* A *est au sort de* B *244140625 à 282429536481.*

Solution. Il faut considérer d'abord que trois dés offrent 216 combinaisons, parmi lesquelles il y en a 15 de 14 points et 27 de 11; qu'ainsi le joueur *A* a 15 cas pour recevoir un écu du joueur *B*, tandis

que celui-ci en a 27 pour recevoir un écu de son adversaire, et qu'il reste 174 cas où chacun des deux conserve le même nombre d'écus, et se trouve par conséquent au même état qu'avant le jet.

Il faut observer ensuite que, par le coroll. 4 de la proposition III, on peut faire abstraction de ces 174 cas inutiles, où le sort de chaque joueur reste le même, comme si les trois dés n'offraient que 42 combinaisons, dans 15 desquelles *A* dût recevoir un écu, *B* le recevant dans les 27 autres.

Il faut considérer en troisième lieu qu'aux nombres de cas 42, 15 et 27 qui ne sont pas premiers entre eux, on peut substituer les plus petits nombres dans le même rapport, savoir, 14, 5 et 9 auxquels nous substituerons même, pour rendre la solution plus générale, les lettres a, b et c.

Cela posé, je procède à la résolution de la question proposée en cherchant par ordre quels auraient été les sorts respectifs des joueurs, s'ils eussent eu chacun un écu, puis s'ils en eussent eu chacun deux, ensuite chacun trois, quatre, etc., jusqu'à ce qu'on découvre ce qu'ils ont droit d'attendre dans le cas présent où ils sont supposés en avoir chacun douze.

Si chacun des joueurs a un écu, il est clair que leurs sorts sont dans la raison de b à c.

S'ils ont chacun deux écus, l'effet du premier jet sera ou que le joueur *A* possède trois écus, ou qu'il ne lui en reste qu'un. S'il en possède trois, il a b cas pour avoir tous les quatre écus, c'est-à-dire, pour gagner la partie et obtenir le dépôt 1, et c cas pour en avoir deux de reste, ou pour avoir le sort qui lui appartenait d'abord, et que j'appelle z; ce qui, par conséquent, lui vaut $\frac{b+cz}{a}$. S'il n'a plus

qu'un écu, il a b cas pour en avoir deux ou pour le sort z, et c cas pour perdre la partie, ce qui vaut $\frac{bz}{a}$. Mais aussi il y a b cas pour que A ait trois écus après le premier jet, et c cas pour qu'il n'en ait plus qu'un. Donc, au commencement, il y a b cas qui lui donnent $\frac{b+cz}{a}$ et c cas qui lui donnent $\frac{bz}{a}$, ce qui produit $\frac{bb+2bcz}{aa}$. Ainsi $z = \frac{bb+2bcz}{aa}$ ou $z = \frac{bb}{aa-2bc} = \frac{bb}{bb+cc}$, et il reste au joueur B $\frac{cc}{bb+cc}$, de manière que leurs sorts sont dans la raison de bb à cc.

Si A et B ont chacun trois écus, il arrivera au premier jet, ou que A se voye en possession de quatre écus, ou qu'il n'en ait plus que deux. Soient x et y ses attentes dans ces deux états. S'il se trouve avoir quatre écus, alors, ou il recevra le premier deux écus de B, ce qui lui fera gagner la partie, ou B en recevra deux de lui, et alors A n'aura plus que deux écus; mais A a bb cas et B en a cc pour acquérir le premier deux écus de son adversaire, comme on peut s'en convaincre en rapprochant ce qui vient d'être démontré de la note I sur la proposition XI. Ainsi A a bb cas pour 1 et cc cas pour y, ce qui vaut $\frac{bb+ccy}{bb+cc}$; et comme nous avons appelé x ce même sort, on aura $x = \frac{bb+ccy}{bb+cc}$ ou $y = \frac{bbx+ccx-bb}{cc}$.

De même lorsqu'il ne reste plus à A que deux écus, il a bb cas pour en recevoir deux autres, c'est-à-dire, pour obtenir le sort x, et cc cas pour perdre les deux siens et en même temps tout le dépôt; ce qui lui vaut $\frac{bbx}{bb+cc}$; et comme il est supposé avoir

alors

alors y, on aura $y = \frac{bbx}{bb+cc}$. Mais on a aussi trouvé précédemment $y = \frac{bbx+ccx-bb}{cc}$. Donc $\frac{bbx+ccx-bb}{cc} = \frac{bbx}{bb+cc}$; d'où l'on tire $x = \frac{b^4+bbcc}{b^4+bbcc+c^4}$. Donc $y \left(= \frac{bbx}{bb+cc}\right) = \frac{b^4}{b^4+bbcc+c^4}$. Cette opération terminée, il faut en venir à l'état de la question, et observer que les joueurs ayant chacun trois écus, il peut arriver en b cas qu'après le premier jet A ait quatre écus, c'est-à-dire, le sort x, ou $\frac{b^4+bbcc}{b^4+bbcc+c^4}$, et en c cas qu'il lui reste deux écus, ou qu'il ait le sort y, ou $\frac{b}{b^4+bbcc+c^4}$. Donc son attente vaut $\frac{b^5+b^4c+b^3cc}{b^5+b^4c+b^3cc+b^2c^3+bc^4+c^5}$ qui se réduit à $\frac{b^3}{c^3}$ après la division par $bb+bc+cc$. Et il reste à B $\frac{c^3}{b^3+c^3}$; de sorte que dans l'hypothèse présente les sorts des joueurs sont dans la raison de b^3 à c^3.

Puis donc que les sorts de A et de B se trouvent être comme les nombres b et c lorsqu'ils ont chacun un écu; comme les quarrés de ces nombres, lorsqu'ils en ont chacun deux; comme leurs cubes, lorsqu'ils en ont chacun trois; nous en concluons par induction que, quel que soit le nombre des écus de chacun, leurs sorts seront toujours comme les puissances de b et de c, ayant un exposant égal au nombre des écus de chacun, et qu'ainsi dans l'exemple proposé par l'auteur, où il suppose chacun des joueurs muni de 12 écus, leurs sorts respectifs sont comme b^{12} et c^{12}, ou, en resubstituant à b et c les nombres 5 et 9, comme 244140625 à 282429536481, ainsi que l'a trouvé l'auteur. C'est ce qu'on peut encore

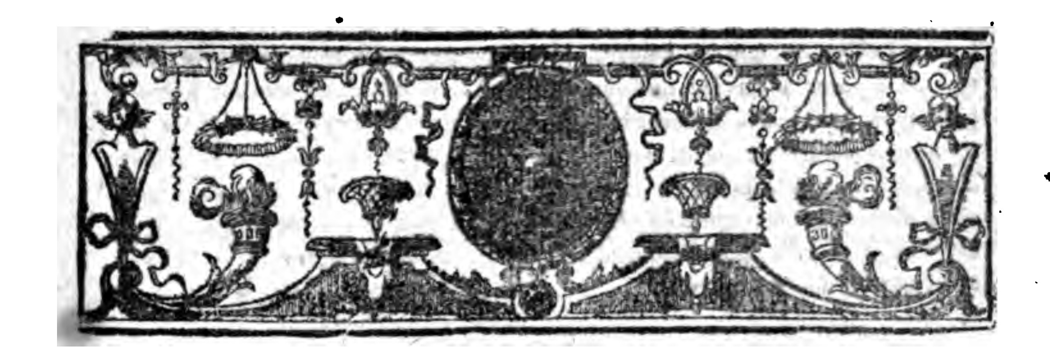
découvrir, sans calcul, de la manière suivante : *A* ayant tous les écus, excepté un, a *b* cas ou chances pour vaincre *B*; et *B* ayant tous les écus, excepté un, a *c* chances pour vaincre *A* : ensuite *A* ayant tous les écus, excepté deux, a *b* chances pour les avoir tous, excepté un, c'est-à-dire, pour avoir les *c* chances précédentes, et par conséquent il a *b* fois *b* chances, ou *bb* chances pour vaincre *B*; et *B* ayant tous les écus, excepté deux, a, par la même raison, *cc* chances pour vaincre *A*. Ainsi, à raison de chacun des écus qui manquent aux joueurs pour gagner la partie, il y a *b* chances pour *A* et *c* chances pour *B*, qui les reportent aux chances précédentes. Donc, puisqu'au commencement du jeu chacun a 12 écus, et par conséquent 12 écus de moins qu'il n'en faut pour gagner le pari, les nombres *b* et *c*, élevés à la puissance 12, donneront la raison des sorts, comme on l'a trouvé précédemment.

Que s'il se trouve quelqu'un à qui ce raisonnement ne paraisse pas assez évident, ou qui n'ait pas assez de confiance dans cette induction, il pourra achever le calcul et l'abréger par un procédé semblable à celui que l'auteur a suivi dans la proposition XI, en passant aussitôt de trois à six écus, et de là à 12, sans s'occuper des cas intermédiaires. C'est ce qu'on peut faire, même sans se livrer à aucun nouveau calcul ; car celui que nous avons appliqué précédemment à l'hypothèse de deux écus par chaque joueur, est encore valable, si nous supposons qu'au lieu d'un écu chaque joueur en ait un nombre quelconque *n*, et au lieu de deux, 2*n*, pourvu qu'aux nombres de cas *b* et *c*, où l'un ou l'autre des joueurs gagne ou perd un écu, nous substituions aussi les nombres des cas où il peut gagner ou per-

dre ces n écus. Et l'on peut en conclure légitimement que les sorts des joueurs, ayant chacun $2n$ écus, sont toujours comme les quarrés de ceux qui se trouvent leur appartenir lorsque le nombre d'écus de chacun est n. Ainsi, comme les sorts des joueurs ayant chacun trois écus, ont été trouvés être dans la raison de b^3 à c^3, ils seront dans celle de b^6 à c^6 dans le cas de six écus, et partant dans celle de b^{12} à c^{12} dans le cas de 12 écus, comme nous l'avons conclu par induction.

On voit donc clairement quels sont les sorts des joueurs lorsqu'ils ont le même nombre d'écus ; mais on n'a encore rien de déterminé sur ceux qu'ils acquièrent dans le cours du jeu, lorsqu'il est échu à l'un plus et à l'autre moins d'écus. Cependant il y a pour cela une règle générale ; car si l'on appelle m le nombre des écus de A, et n le nombre des écus de B, je trouve que le sort de A sera toujours au sort de B comme m à n, si b et c sont égaux ; et comme $b^n c^m - b^{n+n}$ à $c^{m+n} - b^n c^m$, si c excède b. Mais comme la démonstration de cette règle exige un calcul trop laborieux, je l'abandonne à la sagacité du lecteur ; et, sans m'arrêter davantage, je passe à la seconde partie de mon ouvrage.





OBSERVATIONS, ECLAIRCISSEMENS ET ADDITIONS.

§. I.

Fondement de la Théorie.

L'AUTEUR fonde toute sa théorie sur cette maxime ; savoir ; que ; *dans les jeux de hasard, la valeur du sort ou de l'attente de chaque joueur, est précisément ce qu'il faudrait qu'il eût pour parvenir de nouveau, en jouant à jeu égal, à un sort ou à une attente semblable* ; c'est-à-dire, que l'attente de chaque joueur vaut précisément le prix pour lequel il pourrait acheter justement une at-

tente pareille : ce qui est évident. Mais ce prix est égal à ce qu'il serait tenu de déposer à un jeu quelconque, dont les conditions seraient justes, pour avoir à ce jeu la même attente : car, comme l'observe Paschal, *ce que les joueurs ont mis au jeu ne leur appartient plus ; ils ont reçu en revanche le droit d'attendre ce que le hasard peut leur donner, suivant les conditions dont ils sont convenus d'abord.* La maxime fondamentale est donc que le sort de chaque joueur est égal à la mise pour laquelle il pourrait justement acquérir, à un jeu quelconque, un sort pareil.

§. II.

Sur la manière de démontrer la proposition I.

Le principe de l'auteur est que le sort de celui qui attend a ou b, avec la même probabilité, est égal à la mise pour laquelle il pourrait prétendre ce même sort à des conditions justes. Il imagine donc un jeu, dont les conditions sont justes, où, pour la mise x, on a droit d'attendre a ou b, avec la même probabilité, et d'après ces conditions, il détermine la valeur de x.

L'illustre commentateur de Huyghens observe que ce raisonnement n'est pas assez à la portée de tout le monde, et il y en substitue un autre, en partant de ce principe, que *chacun doit attendre, ou est censé attendre ce qu'il ne pourra manquer d'obtenir.* Mais la conséquence ne parait point conforme au principe ; car le sort du joueur dont il s'agit, est $\frac{a+b}{2}$, et ce qu'il ne pourra manquer d'obtenir, est a ou b. Or, soit qu'il obtienne a, soit qu'il obtienne b, il aura plus ou moins de $\frac{a+b}{2}$, à moins que a n'égale b. Le principe dont il s'agit maintenant, est donc que deux ou plusieurs joueurs doivent attendre en commun ce qu'ils ne peuvent manquer d'avoir ensemble : mais cette définition, à peu près identique, n'a pas besoin d'être énoncée.

Remarquez que ce principe ne remplace pas celui de l'auteur, et que la solution le suppose. Bernoulli démontre que si j'attends a ou b, avec la même probabilité, à un jeu qu'il détermine, mon attente vaut $\frac{a+b}{2}$; et ce qu'il faut démontrer et en conclure, c'est que si j'attends d'une manière quelconque a ou b avec la même probabilité, mon attente est $\frac{a+b}{2}$. La conséquence se démontre par le principe de Huyghens.

C'est à Paschal que l'on doit l'invention de la règle. Voici en substance

comment il l'a démontrée : Supposez qu'avec autant de chances pour gagner que pour perdre, A, jouant avec B, doive avoir a en cas de gain, et b en cas de perte, et soit $a=b+c$. A aura, par l'hypothèse, $b+c$ ou b ; il aura donc infailliblement b. Il en sera de même de son adversaire. Il reste c, à quoi A et B ont le même droit, puisque A a autant de chances pour avoir c, que pour le laisser à B, et réciproquement. A a donc de plus $\frac{c}{2}$: donc son sort est $b+\frac{c}{2}=\frac{a+b}{2}$, à cause de $c=a-b$.

Pour en conclure que si j'attends d'une manière quelconque a ou b, dont l'un puisse m'échoir avec la même facilité que l'autre, mon sort est aussi $\frac{a+b}{2}$, l'auteur ajouterait : puisque le sort du joueur A est $\frac{a+b}{2}$, sa mise doit être aussi $\frac{a+b}{2}$, si les conditions sont justes : donc pour la mise $\frac{a+b}{2}$ je puis avoir, comme A, le droit d'attendre a ou b, avec la même probabilité. Donc, lorsque j'attends d'une manière quelconque a ou b, dont l'un peut m'échoir avec la même facilité que l'autre, mon sort est $\frac{a+b}{2}$. Mais ce raisonnement est beaucoup trop compliqué ; car il est d'une évidence immédiate que si j'attends a ou b avec la même probabilité, mon sort est le même que celui d'un joueur qui aurait la même attente.

La règle peut donc se démontrer plus simplement, comme il suit :

Lorsque je dois avoir a ou b avec autant de chances pour l'un que pour l'autre, mon sort est le même que celui de l'un ou de l'autre de deux joueurs dont chacun attendrait a ou b de la même manière que moi. Les sorts de ces deux joueurs seraient égaux et ils attendraient ensemble $a+b$. Le sort de chacun serait donc $\frac{a+b}{2}$. Donc mon sort est $\frac{a+b}{2}$.

On peut encore la démontrer ainsi :

Lorsque j'attends a ou b avec la même probabilité, il est clair qu'avant l'événement je n'ai pas de raison pour préférer ce que j'aurai à ce que je laisserai, puisque j'ai la même facilité pour avoir ou pour laisser le meilleur, soit a, soit b. Ce que j'aurai vaut donc alors pour moi ce que je laisserai. Mon sort est donc la moitié de ce que j'aurai et de ce que je laisserai, c'est-à-dire, la moitié de $a+b$.

§. III.

Démonstrations diverses de la proposition II.

Cette proposition peut encore se démontrer à la manière de Paschal.

Supposez que *A* jouant avec *B* et *C* doive avoir a, b ou c qui puissent échoir à chacun avec la même facilité, et soient $a=b+r$, et $b=c+s$. Chacun des joueurs attendra $c+r+s$, $c+s$ et c avec une égale probabilité, et aura infailliblement c. Il reste $r+s$ et s. Ils ont le même droit à r, puisqu'il n'y a pas de raison pour que r échée à l'un plutôt qu'à l'autre. Chacun a donc encore $\frac{1}{3}r$; et comme il y a deux fois s contre une fois r, chacun aura de plus dans s une quotité double de celle qu'il a dans r, c'est-à-dire, $\frac{2}{3}s$. Le sort de chacun des joueurs est donc $c+\frac{r+2s}{3}=\frac{c+r+s+2c+s}{3}=\frac{a+2c+s}{3}=\frac{a+c+s+c}{3}$ $=\frac{a+b+c}{3}$. Or, si j'attends a, b ou c d'une manière quelconque avec une égale probabilité, mon sort est égal à celui de chacun de ces joueurs. Donc, etc.

La même proposition se démontre plus aisément et plus généralement de chacune des trois manières suivantes.

1. Si je dois avoir l'un des n lots a, b, c, ... ou u, indistinctement et au hasard, je n'ai pas de raison pour faire, avant l'épreuve, plus ou moins de cas de celui que j'aurai que d'aucun de ceux que je laisserai, puisque j'ai la même facilité pour avoir ou laisser chacun de ces lots, sans savoir lequel m'écherra. Les n lots sont donc égaux pour moi avant l'événement. Donc, puisque je n'en aurai qu'un, mon sort est $\frac{a+b+c\ldots+u}{n}$.

2. Avec l'expectative dont il s'agit, mon sort est le même que si a, b, c... et u étant cachés à mes yeux, j'avais à tirer une fois entre ces n lots. Mais si j'avais à tirer n fois au lieu d'une, les n tirages seraient égaux pour moi avant d'être effectués; car je pourrais avoir soit a, soit b, soit c.... soit u, au premier tirage, avec la même facilité qu'au second, qu'au troisième, etc., puisqu'il n'y a pas de raison pour que l'un de ces n lots sorte plutôt que l'autre, soit au premier, soit au second... soit au n^e^. tirage. Or les n tirages me donneraient ensemble $a+b+c\ldots+u$. Donc un seul me vaudrait $\frac{a+b+c\ldots+u}{n}$. Donc, etc.

3. Avec

3. Avec la même expectative, je suis au même état que si je jouais avec $n-1$ autres joueurs et que chacun de nous dût avoir a, b, c.... ou u avec la même probabilité. Nos n sorts seraient égaux, et nous aurions ensemble $a+b+c....+u$. Donc chacun de nous aurait droit d'attendre $\frac{a+b+c....+u}{n}$

On voit donc que *si j'attends l'une de plusieurs choses avec la même probabilité, c'est-à-dire, avec autant de chances pour l'une que pour l'autre, ou, ce qui est équivalent, avec une chance pour chacune, mon sort est égal au quotient de la somme de ces choses divisée par leur nombre, ou, si l'on suppose une chance pour chacune, par le nombre des chances.*

§. IV.

Où la IIIe. proposition se déduit de la IIe.

La troisième proposition est une conséquence évidente de la seconde, prise généralement : car si j'ai une chance pour a, une pour c...., une pour u ; de plus une pour b, une pour d...., une pour v, et que le nombre des choses pour chacune desquelles j'ai une chance soit n, qui sera aussi le nombre des chances, mon sort est $\frac{a+c....+u+b+d....+v}{n}$; car j'attends a, c...., u, b, d.... v avec la même probabilité. Soient maintenant $a=c=....u$, au nombre de p et $b=d=....v$ au nombre de q. J'aurai p chances pour a, et q chances pour b ; on aura $a+c....+u=pa$, $b+d...+v=qb$, et $n=p+q$. Ces valeurs étant substituées dans la formule, je trouverai pour la valeur de mon sort $\frac{pa+qb}{p+q}$.

On démontrera de même que si j'ai p chances pour a, q chances pour b, et r chances pour c, mon sort sera $\frac{pa+qb+rc}{p+q+r}$ etc.

En effet, si j'ai p chances pour a, et q chances pour b, j'ai autant de fois une chance pour a qu'il y a d'unités dans p, et autant de fois une chance pour b qu'il y a d'unités dans q ; la somme des choses pour chacune desquelles j'ai une chance est donc $pa+qb$, et le nombre de ces chances est $p+q$: donc, par la règle déduite à la fin du § précédent, mon sort est $\frac{pa+qb}{p+q}$.

De même, si j'ai p chances pour a, q chances pour b, et .... r chances pour c, la somme des choses pour chacune desquelles j'ai une chance

est $pa+qb \ldots +rc$, le nombre des chances étant $p+q \ldots +r$. Donc mon sort est $\frac{pa+qb \ldots +rc}{p+q \ldots +r}$.

§. V.

1. *Solution générale du problème des propositions IV et V.*
2. *Si, dans les jeux de hasard, il faut avoir égard aux événemens qui ont précédé.*
3. *Détermination des enjeux pour les attentes respectives.*

1. On suppose que deux joueurs A et B, ayant chacun une chance pour réussir à chaque épreuve, soient convenus que l'argent du jeu, ou le dépôt que nous ferons toujours $=1$, appartiendra à celui qui le premier aura réussi un nombre donné de fois, ou, en d'autres termes, qui le premier aura gagné un nombre donné de points ou de jeux; et que la partie étant déjà commencée, il y ait un ou plusieurs jeux de gagnés par l'un des joueurs, ou de part et d'autre. Il s'agit de déterminer les sorts respectifs.

L'auteur, après avoir établi que la question doit se résoudre par la considération des jeux qui manquent à chacun des joueurs pour compléter le nombre prescrit, la résout, dans les propositions I et II, pour les cas où il manque un jeu à A, et 2 ou 3 à B. Il est facile de continuer le calcul, et de voir quels seraient les sorts respectifs si les jeux manquans à A et à B étaient 1 et 4, 1 et 5 ... ou 1 et m.

En effet, supposons qu'il manque un jeu à A.

S'il en manque 1 à B, le sort de A est évidemment $\frac{1}{2}$;

S'il en manque 2 à B, l'autre a une chance pour avoir le dépôt 1, et une pour que les jeux respectivement manquans soient 1 et 1, ou, pour avoir $\frac{1}{2}$, ce qui lui vaut $\frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1+\frac{1}{2}}{2} = \frac{2+1}{2^2}$;

S'il en manque 3 à B, le premier a une chance pour avoir 1, et une chance pour que les jeux manquans soient 1 et 2, comme dans la supposition précédente, ce qui vaut à A $\frac{1+\frac{2+1}{2^2}}{2} = \frac{2^2+2+1}{2^3}$;

S'il en manque 4 à B, son adversaire a une chance pour 1, et une chance pour que les jeux manquans soient 1 et 3, ce qui lui donne pour sort $\frac{1+\frac{2^2+2+1}{2^3}}{2} = \frac{2^3+2^2+2+1}{2^4}$.

En général, s'il en manque m à B, il est visible que le sort de A est $\frac{2^{m-1}+2^{m-2}+2^{m-3}\ldots\ldots+1}{2^m}=2^{-m}\ldots+2^{-3}+2^{-2}+2^{-1}$, progression géométrique dont le quotient est 2, et dont par conséquent la somme est $2.2^{-1}-2^{-m}=1-\frac{1}{2^m}=\frac{2^m-1}{2^m}$. Donc le sort de B est $1-\left(1-\frac{1}{2^m}\right)=\frac{1}{2^m}$.

C'est ce qu'on aurait pu reconnaître à l'inspection seule des fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, etc., qui expriment le sort de A, pour les jeux manquans 1 et 2, 1 et 3, 1 et 4, etc., et qui ont constamment pour dénominateur le nombre 2 élevé à la puissance indiquée par le nombre des jeux qui manquent à B, et pour numérateur ce dénominateur même diminué de l'unité.

2. Nous avons dit que dans ce calcul on considère les jeux qui manquent de part et d'autre : de sorte que si la partie est en 3 jeux et que A en ait gagné 2 et B 1, ou si elle est en 4 jeux et que A en ait gagné 3 et B 2, ou en 20 jeux et que A en ait gagné 19 et B 18, le sort de A est toujours le même, parce que dans tous ces cas il manque un jeu à A, tandis qu'il en manque deux à B.

On n'a donc égard aux jeux précédemment gagnés, que pour déterminer les nombres de ceux qui manquent encore : ce qui suppose que la fortune du jeu n'est pas mieux disposée, pour l'avenir, envers ceux à qui elle a été le plus avantageuse, qu'envers ceux à qui elle a été le plus contraire, quoiqu'il y ait beaucoup de gens qui croient à ce qu'on appelle vulgairement *le bonheur* des joueurs, ou à la prédilection du sort, d'après quelques événemens favorables. Bernoulli tourne cette opinion en ridicule ; mais un géometre célèbre a tâché, il y a quelques années, d'accréditer l'opinion contraire, et de prouver qu'il faut avoir égard aux coups précédens, non parce que le sort du joueur à qui ils ont été favorables devient plus avantageux pour le coup suivant, mais parce qu'il le devient moins, comme si l'on pouvait supposer dans les dés, par exemple, une répugnance occulte à présenter plusieurs fois de suite la même face. Cette erreur est moins naturelle que l'autre ; car, comme les instrumens du sort, tels que les dés, ne sont jamais parfaits, il est probable que si un joueur amène souvent la même face, c'est parce qu'elle est plus facile à amener.

Dans l'un ou l'autre de ces systèmes, si A pariait [n'importe dans quel rapport] de gagner un jeu avant que B en eût gagné quatre, son sort ne serait pas le même que si ayant parié de gagner quatre jeux avant B, il en eût déjà gagné trois et B aucun ; quoique dans ce dernier cas, comme dans le premier, il s'agit de gagner un jeu avant que B en eût gagné quatre : car

A et *B* commençant à jouer dans la première hypothèse, il n'y aurait pas lieu de présumer que la fortune du jeu dût incliner pour ou contre l'un ou l'autre; mais *A* ayant déjà gagné trois jeux et *B* aucun dans la seconde, *A* aurait plus d'espoir que dans la première, s'il fallait croire au système de la prédilection du sort; et il en aurait moins, si les succès précédens rendaient moins probables les succès suivans.

Ce ne serait pas non plus la même chose de parier d'amener deux fois le six avec deux dés en un seul jet, ou de l'amener deux fois en deux jets avec un seul dé: car, si l'un des deux dés devait présenter le six, ce hasard n'en serait ni plus ni moins probable de la part de l'autre; mais si le même dé présentait le six au premier jet, il inclinerait, dans le premier système, à présenter la même face au jet suivant pour favoriser son protégé, et il en ferait difficulté dans le second, pour ne pas se répéter.

Ces systèmes anéantiraient toute la théorie des probabilités, puisqu'il serait impossible d'apprécier soit la prédilection du sort pour un des joueurs, soit sa répugnance à donner plusieurs fois de suite les même résultats.

3. Quand on connaît le sort d'un joueur, il est facile de déterminer sa mise, et le rapport de son enjeu à celui de son adversaire, ou à ceux des autres joueurs collectivement. Bernoulli fait voir que celui qui a trois cas pour gagner, et un cas pour perdre, ou qui attend les trois quarts de l'argent du jeu, tandis que son antagoniste n'en attend que le quart, doit déposer trois contre un: ce qu'il démontre assez péniblement de deux manières, dont la seconde est difficile à entendre. On peut remplacer celle-ci par la suivante: celui qui a trois cas pour gagner et un cas pour perdre, est au même état que s'il avait trois coups à jouer contre un à chances égales: or, dans cette hypothèse, il devrait déposer autant pour chaque coup, que son adversaire pour le sien. Donc, etc. Mais il ne faut pas d'autre démonstration que ce principe évident, savoir, que la mise doit être égale à la valeur du sort, car elle en est le juste prix, sans quoi les conditions du jeu ne seraient pas justes.

En général, celui qui attend $\frac{b}{a}$ doit déposer b contre $a-b$; car le sort de son adversaire [ou des autres joueurs pris collectivement] est $1-\frac{b}{a}=\frac{a-b}{a}$. Les mises respectives doivent donc être $\frac{b}{a}$ et $\frac{a-b}{a}$ et, par conséquent dans le rapport de b à $a-b$.

Celui qui a b chances pour gagner et $a-b$ pour perdre, a pour sort

$\frac{b.\,1+\overline{a-b}.\,0}{b+a-b}=\frac{b}{a}$; et celui qui a $a-b$ chances pour gagner et b pour perdre, a pour sort $\frac{\overline{a-b}.\,1+b.\,0}{a-b+b}=\frac{a-b}{a}$. *La part d'un joueur dans l'argent du jeu, et, par conséquent, sa mise, est donc à l'argent du jeu comme le nombre des chances qui lui sont favorables est à la totalité des chances; et les mises des joueurs sont entre elles comme leurs chances favorables.*

§. VI.

Où l'on généralise les propositions VI et VII.

Dans ces deux propositions, l'auteur suppose qu'il manque deux jeux à A; il démontre, dans la VIe., que le sort de A est $\frac{11}{16}a$, lorsqu'il en manque 3 à B; et dans la VIIe., que le sort du même joueur est $\frac{13}{16}$, lorsqu'il en manque quatre à son adversaire.

Nous pouvons aller plus loin, et trouver l'expression du sort de A, lorsqu'il lui manque deux jeux; quel que soit le nombre de ceux qui manquent à B.

Supposons; en effet, qu'il manque constamment deux jeux à A.

S'il en manque 1 à B, le sort de B est $\frac{3}{4}$, comme on l'a vu, et partant; le sort de A est $\frac{1}{4}$;

S'il en manque 2 à B, le sort de A est évidemment $\frac{4}{8}$;

S'il en manque 3 à B, l'auteur démontre que le sort de A est $\frac{11}{16}$;

S'il en manque 4 à B, l'auteur démontre que le sort de A est $\frac{13}{16}=\frac{26}{32}$;

S'il en manque 5 à B, il y a une chance pour que les jeux manquans à A et à B, soient 1 et 5, ce qui vaudrait à A $\frac{31}{32}$, et une chance pour qu'ils soient 2 et 4, ce qui lui vaudrait $\frac{26}{32}$: le sort de A est donc $\frac{31+26}{64}=\frac{57}{64}$.

Et ainsi de suite.

Si donc il manque 1, 2, 3, 4, 5 . . . . m jeux à B,

le sort de A est. . . . $\frac{1}{4}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{11}{16}$, $\frac{26}{32}$, $\frac{57}{64}$. . . $\frac{x}{2^{m+1}}$.

Où l'on voit que le dénominateur du sort de A, est toujours la puissance du nombre 2, qui est indiquée par le nombre des jeux qui manquent à B, plus un.

Soient x le numérateur de ce sort, et m le nombre des jeux qui manquent B: le sort de A sera $\frac{x}{2^{m+1}}$.

Les différences des dénominateurs et des numérateurs sont 3, 4, 5, 6, 7 ... $2^{m-1}-x$, au nombre de m, en progression arithmétique, dont la différence est 1; de sorte qu'on a $2^{m+1}-x=3+(m-1).1=m+2$; d'où l'on tire $x=2^{m+1}-(m+2)$. Le sort de A est donc $\frac{2^{m+1}-(m+2)}{2^{m+1}}$: ce qui donne pour le sort de B $1-\frac{2^{m+1}-(m+2)}{2^{m+1}}=\frac{m+2}{2^{m+1}}$.

§. VII.

Construction de la table pour deux joueurs.

On a vu au §. V que s'il manque un jeu à A et m à B, le sort de A est $\frac{2^m-x}{2^m}$: d'où il suit que le sort de B est, $1-\frac{2^m-x}{2^m}=\frac{1}{2}$, et par conséquent que le sort de A est $\frac{1}{2^m}$, s'il lui manque m jeux, et qu'il en manque 1 à B.

Il est donc facile de construire une table qui fasse connaître le sort de A, lorsqu'il lui manque un jeu, quel que soit le nombre des jeux qui manquent à B, et lorsqu'il manque un jeu à B, quel que soit le nombre de ceux qui manquent à A.

Jeux manq. à B / à A (Sorts du joueur A)	1	2	3	4	etc.
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{16}$	etc.
2	$\frac{1}{4}$				
3	$\frac{1}{8}$				
4	$\frac{1}{16}$				
etc.	etc.				

Telle est la table ci-contre, qu'on peut continuer à volonté, avec la plus grande facilité, où l'on voit que s'il manque un jeu à A, et 1, 2, 3, 4, etc. à B, le sort de A est $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{15}{16}$, etc., et que s'il manque un jeu à B, et 1, 2, 3, 4, etc. à A, le sort de ce dernier est $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, etc.; car la première de ces deux suites de fractions se trouve dans les cases 1 à 1, 1 à 2, 1 à 3, 1 à 4, et la seconde, dans les cases 1 à 1, 2 à 1, 3 à 1, 4 à 1, etc.: le premier nombre marquant les jeux qui manquent à A, et le second, ceux qui manquent à B.

Maintenant, il est aisé de trouver le sort de *A* pour les autres cas, ou de remplir les cases vacantes; car il ne s'agit que de prendre la moitié des deux fractions prochaines, en dessus et à côté. Ainsi, pour remplir la case 2 à 2, j'ajoute la fraction de la case supérieure 1 à 2 à celle de la case latérale 2 à 1, c'est-à-dire, $\frac{3}{4}$ à $\frac{1}{4}$, et je prends la moitié de la somme $\frac{4}{8}$: c'est la fraction de la case 2 à 2. De même, pour avoir la fraction de la case 2 à 3, j'ajoute la fraction de la case 1 à 3 à celle de la case 2 à 2, et j'en prends la moitié, et ainsi de suite.

Jeux manq'. à *A* / à *B* — Sorts du joueur *A*	1	2	3	4	etc.
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{16}$	etc.
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{26}{32}$	etc.
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{16}{32}$	$\frac{42}{64}$	etc.
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{6}{32}$	$\frac{22}{64}$	$\frac{64}{125}$	etc.
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.

La raison en est manifeste; car si, par exemple, il manque deux jeux à *A* et trois à *B*, *A* a une chance pour que les jeux respectivement manquans soient 1 et 3, auquel cas son sort est $\frac{7}{8}$, et une chance pour qu'ils soient 2 et 2, auquel cas son sort est $\frac{4}{8}$: ainsi, les jeux manquans étant 2 et 3, *A* a une chance pour $\frac{7}{8}$, et une chance pour $\frac{4}{8}$; ce qui lui vaut $\frac{1}{2}\left(\frac{7}{8}+\frac{4}{8}\right) = \frac{11}{16}$.

En général, si les jeux manquans à *A* et *B* sont n et m, il est clair que *A* a une chance pour qu'ils soient $n-1$ et m, et une chance pour qu'ils soient n et $m-1$. Si donc le sort de *A* est s lorsque les jeux respectivement manquans sont $n-1$ et m, et t lorsqu'ils sont n et $m-1$, *A* a une chance pour s et une chance pour t lorsque les jeux respectivement manquans sont n et m; ce qui lui vaut $\frac{s+t}{2}$.

§. VIII.

Solution générale du problème des parties en plusieurs jeux entre deux joueurs.

Il s'agit de déterminer les sorts de deux joueurs, dans le cours d'une partie en plusieurs jeux, quels que soient les nombres des jeux qui leur manquent respectivement.

Paschal a donné une règle pour connaître le gain d'un des joueurs sur l'argent de son adversaire, ou la quotité qui doit lui en appartenir, lorsqu'il manque à l'un des joueurs un jeu de plus qu'à l'autre. Cette règle se trouve dans une de ses lettres à Fermat, où il dit qu'elle se démontre avec beau-

coup de peine par les combinaisons, et qu'il n'a pu la démontrer par sa méthode, qui est la même que celle de Huyghens.

Bernoulli renvoie le problème général à la seconde partie, où il en déduit la solution des propriétés des nombres figurés et de la théorie des combinaisons.

Nous allons tirer cette solution de la proposition III de Huyghens et de la loi des coëfficiens d'un binôme élevé à une puissance quelconque.

On a vu précédemment que s'il manque m jeux à B et 1 à A, le sort de A est $\frac{2^m-1}{2^m}$ et que celui de B est $\frac{1}{2^m}$.

Nous avons démontré de plus que s'il manque m jeux à B et 2 à A, le sort de A est $\frac{2^{m+1}-(m+2)}{2^{m+1}}$, et que celui de B est $\frac{m+2}{2^{m+1}}$.

Maintenant s'il manque à B 1, 2, 3, 4, 5.... m jeux et 3 à A, il est facile de voir que le sort de A est $\frac{1}{8}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{16}{32}$, $\frac{42}{64}$, $\frac{99}{128}$... $\frac{y}{2^{m+2}}$.

Le dénominateur du sort de A est constamment le nombre 2 élevé à la puissance exprimée par le nombre des jeux qui manquent à B, augmenté de 2. Si donc il manque m jeux à B, ce dénominateur est 2^{m+2}. Pour trouver le numérateur y, on prendra les différences des dénominateurs et des numérateurs des fractions correspondantes aux nombres 1, 2, 3, 4, 5 des jeux qui manquent à B et les différences de ces différences.

Les premières sont 7, 11, 16, 22, 29.... $2^{m+2}-y$, au nombre de m;
Les secondes sont....4, 5, 6, 7..... z, au nombre de $m-1$.

Celles-ci sont en progression arithmétique, dont la différence est 1 et le nombre des termes $m-1$, et par conséquent le dernier terme $z=4+m-2=m+2$. La somme est donc $(4+m+2)\frac{m-1}{2}=\frac{mm+5m-6}{2}$.

Mais la seconde série étant celle des différences de la première, dont le premier terme est 7, de sorte qu'on a $7+4=11$, $7+4+5=16$, $7+4+5+6=22$, etc., il est clair que la somme des termes de la seconde, augmentée de 7, est égale au dernier terme de la première.

On a donc $2^{m+2}-y=\frac{mm+5m+8}{2}$, d'où l'on tire $y=2^{m+2}-\frac{mm+5m+8}{2}$. donc sort de A ou $\frac{y}{2^{m+2}}=\frac{2^{m+2}-\frac{mm+5m+8}{2}}{2^{m+2}}$; et partant

est $pa+qb \ldots +rc$, le nombre des chances étant $p+q \ldots +r$. Donc mon sort est $\frac{pa+qb \ldots +rc}{p+q \ldots +r}$.

§. V.

1. *Solution générale du problème des propositions IV et V.*
2. *Si, dans les jeux de hasard, il faut avoir égard aux événemens qui ont précédé.*
3. *Détermination des enjeux pour les attentes respectives.*

1. On suppose que deux joueurs *A* et *B*, ayant chacun une chance pour réussir à chaque épreuve, soient convenus que l'argent du jeu, ou le dépôt que nous ferons toujours $=1$, appartiendra à celui qui le premier aura réussi un nombre donné de fois, ou, en d'autres termes, qui le premier aura gagné un nombre donné de points ou de jeux; et que la partie étant déjà commencée, il y ait un ou plusieurs jeux de gagnés par l'un des joueurs, ou de part et d'autre. Il s'agit de déterminer les sorts respectifs.

L'auteur, après avoir établi que la question doit se résoudre par la considération des jeux qui manquent à chacun des joueurs pour compléter le nombre prescrit, la résout, dans les propositions I et II, pour les cas où il manque un jeu à *A*, et 2 ou 3 à *B*. Il est facile de continuer le calcul, et de voir quels seraient les sorts respectifs si les jeux manquans à *A* et à *B* étaient 1 et 4, 1 et 5 ... ou 1 et *m*.

En effet, supposons qu'il manque un jeu à *A*.

S'il en manque 1 à *B*, le sort de *A* est évidemment $\frac{1}{2}$;

S'il en manque 2 à *B*, l'autre a une chance pour avoir le dépôt 1, et une pour que les jeux respectivement manquans soient 1 et 1, ou, pour avoir $\frac{1}{2}$, ce qui lui vaut $\frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1+\frac{1}{2}}{2} = \frac{2+1}{2^2}$;

S'il en manque 3 à *B*, le premier a une chance pour avoir 1, et une chance pour que les jeux manquans soient 1 et 2, comme dans la supposition précédente, ce qui vaut à *A* $\frac{1+\frac{2+1}{2^2}}{2} = \frac{2^2+2+1}{2^3}$;

S'il en manque 4 à *B*, son adversaire a une chance pour 1, et une chance pour que les jeux manquans soient 1 et 3, ce qui lui donne pour sort $\frac{1+\frac{2^2+2+1}{2^3}}{2} = \frac{2^3+2^2+2+1}{2^4}$.

En général, s'il en manque m à B, il est visible que le sort de A est $\frac{2^{m-1}+2^{m-2}+2^{m-3}\ldots\ldots+1}{2^m}=2^{-m}\ldots+2^{-3}+2^{-2}+2^{-1}$, progression géométrique dont le quotient est 2, et dont par conséquent la somme est $2.2^{-1}-2^{-m}=1-\frac{1}{2^m}=\frac{2^m-1}{2^m}$. Donc le sort de B est $1-\left(1-\frac{1}{2^m}\right)=\frac{1}{2^m}$.

C'est ce qu'on aurait pu reconnaître à l'inspection seule des fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, etc., qui expriment le sort de A, pour les jeux manquans 1 et 2, 1 et 3, 1 et 4, etc., et qui ont constamment pour dénominateur le nombre 2 élevé à la puissance indiquée par le nombre des jeux qui manquent à B, et pour numérateur ce dénominateur même diminué de l'unité.

2. Nous avons dit que dans ce calcul on considère les jeux qui manquent de part et d'autre : de sorte que si la partie est en 3 jeux et que A en ait gagné 2 et B 1, ou si elle est en 4 jeux et que A en ait gagné 3 et B 2, ou en 20 jeux et que A en ait gagné 19 et B 18, le sort de A est toujours le même, parce que dans tous ces cas il manque un jeu à A, tandis qu'il en manque deux à B.

On n'a donc égard aux jeux précédemment gagnés, que pour déterminer les nombres de ceux qui manquent encore : ce qui suppose que la fortune du jeu n'est pas mieux disposée, pour l'avenir, envers ceux à qui elle a été le plus avantageuse, qu'envers ceux à qui elle a été le plus contraire, quoiqu'il y ait beaucoup de gens qui croient à ce qu'on appelle vulgairement *le bonheur* des joueurs, ou à la prédilection du sort, d'après quelques événemens favorables. Bernoulli tourne cette opinion en ridicule ; mais un géometre célèbre a tâché, il y a quelques années, d'accréditer l'opinion contraire, et de prouver qu'il faut avoir égard aux coups précédens, non parce que le sort du joueur à qui ils ont été favorables devient plus avantageux pour le coup suivant, mais parce qu'il le devient moins, comme si l'on pouvait supposer dans les dés, par exemple, une répugnance occulte à présenter plusieurs fois de suite la même face. Cette erreur est moins naturelle que l'autre ; car, comme les instrumens du sort, tels que les dés, ne sont jamais parfaits, il est probable que si un joueur amène souvent la même face, c'est parce qu'elle est plus facile à amener.

Dans l'un ou l'autre de ces systèmes, si A pariait [n'importe dans quel rapport] de gagner un jeu avant que B en eût gagné quatre, son sort ne serait pas le même que si ayant parié de gagner quatre jeux avant B, il en eût déjà gagné trois et B aucun ; quoique dans ce dernier cas, comme dans le premier, il s'agit de gagner un jeu avant que B en eût gagné quatre: car

qu'un écu, il a b cas pour en avoir deux ou pour le sort z, et c cas pour perdre la partie, ce qui vaut $\frac{bz}{a}$. Mais aussi il y a b cas pour que A ait trois écus après le premier jet, et c cas pour qu'il n'en ait plus qu'un. Donc, au commencement, il y a b cas qui lui donnent $\frac{b+cz}{a}$ et c cas qui lui donnent $\frac{bz}{a}$, ce qui produit $\frac{bb+2bcz}{aa}$. Ainsi $z = \frac{bb+2bcz}{aa}$ ou $z = \frac{bb}{aa-2bc} = \frac{bb}{bb+cc}$, et il reste au joueur B $\frac{cc}{bb+cc}$, de manière que leurs sorts sont dans la raison de bb à cc.

Si A et B ont chacun trois écus, il arrivera au premier jet, ou que A se voye en possession de quatre écus, ou qu'il n'en ait plus que deux. Soient x et y ses attentes dans ces deux états. S'il se trouve avoir quatre écus, alors, ou il recevra le premier deux écus de B, ce qui lui fera gagner la partie, ou B en recevra deux de lui, et alors A n'aura plus que deux écus; mais A a bb cas et B en a cc pour acquérir le premier deux écus de son adversaire, comme on peut s'en convaincre en rapprochant ce qui vient d'être démontré de la note I sur la proposition XI. Ainsi A a bb cas pour 1 et cc cas pour y, ce qui vaut $\frac{bb+ccy}{bb+cc}$; et comme nous avons appelé x ce même sort, on aura $x = \frac{bb+ccy}{bb+cc}$ ou $y = \frac{bbx+ccx-bb}{cc}$. De même lorsqu'il ne reste plus à A que deux écus, il a bb cas pour en recevoir deux autres, c'est-à-dire, pour obtenir le sort x, et cc cas pour perdre les deux siens et en même temps tout le dépôt; ce qui lui vaut $\frac{bbx}{bb+cc}$; et comme il est supposé avoir alors

alors y, on aura $y = \frac{tbx}{bb+cc}$. Mais on a aussi trouvé précédemment $y = \frac{bbx+ccx-bb}{cc}$. Donc $\frac{bbx+ccx-bb}{cc} = \frac{bbx}{\text{[illegible]}}$; d'où l'on tire $x = \frac{b^4+bbcc}{b^4+bbcc+c^4}$. Donc $y \left(= \frac{bbx}{bb+cc}\right) = \frac{b^4}{b^4+bbcc+c^4}$. Cette opération terminée, il faut en venir à l'état de la question, et observer que les joueurs ayant chacun trois écus, il peut arriver en b cas qu'après le premier jet A ait quatre écus, c'est-à-dire, le sort x, ou $\frac{b^4+bbcc}{b^4+bbcc+c^4}$, et en c cas qu'il lui reste deux écus, ou qu'il ait le sort y, ou $\frac{b}{b^4+bbcc+c^4}$. Donc son attente vaut $\frac{b^5+b^4c+b^3cc}{b^5+b^4c+b^3cc+b^2c^3+bc^4+c^5}$ qui se réduit à $\frac{b^3}{c^3}$ après la division par $bb+bc+cc$. Et il reste à B $\frac{c^3}{b^3+c^3}$; de sorte que dans l'hypothèse présente les sorts des joueurs sont dans la raison de b^3 à c^3.

Puis donc que les sorts de A et de B se trouvent être comme les nombres b et c lorsqu'ils ont chacun un écu; comme les quarrés de ces nombres, lorsqu'ils en ont chacun deux; comme leurs cubes, lorsqu'ils en ont chacun trois; nous en concluons par induction que, quel que soit le nombre des écus de chacun, leurs sorts seront toujours comme les puissances de b et de c, ayant un exposant égal au nombre des écus de chacun, et qu'ainsi dans l'exemple proposé par l'auteur, où il suppose chacun des joueurs muni de 12 écus, leurs sorts respectifs sont comme b^{12} et c^{12}, ou, en resubstituant à b et c les nombres 5 et 9, comme 244140625 à 282429536481, ainsi que l'a trouvé l'auteur. C'est ce qu'on peut encore

§. IX.

1. *Procédé méthodique pour résoudre les questions comprises dans les propositions VIII et IX.*

2. *Construction facile d'une table indicative des sorts des trois joueurs* A, B, C, *à chacun desquels il manque un certain nombre de jeux pour gagner la partie.*

1. Pour abréger, nous appelerons le cas n; m, l, celui où il manque n jeux à A, m à B et l à C, le premier caractère désignant toujours les jeux qui manquent à A, le second les jeux qui manquent à B, et le troisième les jeux qui manquent à C.

Cherchons d'abord le sort de A lorsqu'il lui manque 1, 2, 3, 4.... ou n jeux, tandis qu'il en manque 1 à chacun des deux autres.

Il est clair que si $n=1$ le sort de A est $\frac{1}{3}$; c'est-à-dire, que ce sort est $\frac{1}{3}$ pour le cas où il lui manque 1 jeu, et où il en manque également 1 à B et 1 à C, ou pour le cas 1. 1. 1. Si $n=2$, ou s'il manque 2 jeux à A, tandis qu'il en manque 1 à B et 1 à C, A a une chance pour le cas précédent 1. 1. 1, une chance pour le cas 1. 0. 1. où il perd, puisque B gagne, et une chance pour le cas 1. 1. 0, où il perd encore; c'est-à-dire, qu'il a une chance pour $\frac{1}{3}$, et deux pour 0, ce qui lui vaut $\frac{1}{3^2}$. Si $n=3$, le premier joueur a une chance pour le cas 2. 1. 1, et deux chances pour 0 ce qui vaut $\frac{1}{3^3}$: on voit de même que s'il lui manque 4 jeux, son sort est $\frac{1}{3^4}$, et, en général, que s'il lui en manque n, il a pour sort $\frac{1}{3^n}$. De-là il s'ensuit qu'il reste aux deux autres joueurs $1-\frac{1}{3^n}=\frac{3^n-1}{3^n}$, et que leurs sorts étant égaux, celui de chacun est $\frac{3^n-1}{2.3^n}$: c'est le sort de A pour le cas 1. 1. n.

Il est facile maintenant de calculer le sort de A pour les cas où il manque 1 jeu à B et 2 à C, quel que soit le nombre des jeux qui manquent au premier, ou pour le cas n. 1. 2, qui est pour lui le même que les cas n. 2. 1. Car si $n=1$, A a un chance pour avoir le dépôt 1, une chance pour perdre et une chance pour le cas 1. 1. 1, ou pour $\frac{1}{3}$; son sort est donc $\frac{1+\frac{1}{3}}{3}=\frac{4}{3^2}$. Si $n=2$, il a une chance pour le cas précédent 1. 1. 2, qui vaut

$\frac{4}{3^2}$, une chance pour o, une chance pour le cas 2. 1. 1; ou pour $\frac{1}{3^2}$, son sort est donc $\frac{5}{3^3}$. On trouvera de même que si $n=3$, 4, 5...; le sort de *A* sera $\frac{6}{3^4}$, $\frac{7}{3^5}$, $\frac{8}{3^6}$.... et l'on voit, en général, que pour le cas *n*. 1. 2, ou *n*. 2. 1, son sort est $\frac{n+3}{3^{n+1}}$

Supposons à présent qu'il manque 1 jeu à *B* et 3 à *C*, ou réciproquement; et qu'il en manque *n* à *A*. Si $n=1$, *A* a une chance pour avoir 1, une chance pour avoir o, et une pour le cas 1. 1. 2 ou pour $\frac{4}{3^2}$, ce qui vaut $\frac{13}{3^3}$
Si $n=2$, il a un chance pour le cas précédent 1. 1. 2, ou pour $\frac{13}{3^3}$, une pour o, et une pour le cas 2. 1. 2, ou pour $\frac{5}{3^3}$ de sorte que son sort est $\frac{18}{3^4}$. Et si l'on fait successivement $n=3$, 4, 5..., on trouvera pour le sort de *A* $\frac{24}{3^5}$, $\frac{31}{3^6}$, $\frac{39}{3^7}$..., le dénominateur étant toujours 3^{n+2}; et comme les numérateurs sont 13, 13+5, 13+5+6, 13+5+6+7, 13+5+6+7+8... où le dernier terme est composé de 13 et de $n-1$ termes de la progression 5, 6, 7, 8... dont le $n-1^e$ terme est $n+3$ et la somme $[n+8]\frac{n-1}{2} = \frac{nn+7n-8}{2}$ le numérateur du sort de *A*, pour le cas *n*. 1. 3, ou *n*. 3. 1, est $13+\frac{nn+7n-8}{2} = \frac{nn+7n+18}{2}$; et son sort est $\frac{nn+7n+18}{2.\ 3^{n+2}}$.

Nous pourrions calculer également le cas général *n*. 1. 4, ou *n*. 4. 1; mais passons à d'autres hypothèses, et d'abord cherchons le sort de *A* pour le cas *n*. 2. 2.

Si $n=1$, *A* a une chance pour avoir le dépôt 1, une chance pour le cas 1. 1. 2, ou pour $\frac{4}{3^2}$, et une chance pour le cas 1. 2. 1, qui vaut encore $\frac{4}{3^2}$: son sort est $\frac{17}{3^3}$. Si $n=2$, il a une chance pour le cas précédent 1. 2. 2 ou pour $\frac{17}{3^3}$, une pour le cas 2. 1. 2 précédemment calculé, ou pour $\frac{5}{3^3}$; et une chance pour le cas 2. 2. 1, qui vaut encore $\frac{5}{3^3}$: son sort est donc $\frac{27}{3^4}$.

On trouvera de même que si $n = 3, 4, 5 \ldots$ le sort de A sera $\frac{39}{3^5}$, $\frac{53}{3^6}$, $\frac{69}{3^7} \ldots$, où le dénominateur du sort de A est toujours 3^{n+2}. On peu tobserver la loi que suivent les numérateurs, qu'on peut écrire de cette manière :

$$17$$
$$17 + 10$$
$$17 + 10 + 12$$
$$17 + 10 + 12 + 14$$
$$17 + 10 + 12 + 14 + 16$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Le dernier est composé de 17 et de $n-1$ termes de la progression 10, 12, 14, 16.... dont la différence est 2, le dernier terme $10 + \overline{n-2}.\,2 = 2n + 6$ et la somme $\overline{2n + 16}\,\frac{n-1}{2} = nn + 7n - 8$: de sorte que le numérateur du sort de A pour le cas $n.\,2.\,2$ est $17 + nn + 7n - 8 = nn + 7n + 9$, et ce sort $\frac{nn + 7n + 9}{3^{n+2}}$.

Soient n, m, l les nombres des jeux qui manquent à A, B, C; et t, u, x les sorts de A pour les cas $n-1.\,m.\,l$, $n.\,m-1.\,l$, $n.\,m.\,l-1$. Il est clair que dans le cas $n.\,m.\,l$, A a une chance pour le cas $n-1.\,m.\,l$, ou pour t, une pour le cas $n.\,m-1.\,l$, ou pour u, et une pour le cas $n.\,m.\,l-1$, ou pour x. Son sort est donc $\frac{t+u+x}{3}$.

D'après cette dernière observation, et indépendamment des formules précédentes, il est extrêmement facile de construire et de continuer à volonté la table ci-jointe qui représente les sorts des trois joueurs dans tous les cas possibles.

TABLE

POUR TROIS JOUEURS.

JEUX manquans à *A B C.*	SORT de *A.*	JEUX manquans à *A B C.*	SORT de *A.*	JEUX manquans à *A B C.*	SORT de *A.*	JEUX manquans à *A B C.*	SORT de *A.*	&c.
1. 1. 1.	$\frac{1}{3}$.	2. 1. 1.	$\frac{1}{9}$.	3. 1. 1.	$\frac{1}{27}$.	4. 1. 1.	$\frac{1}{81}$.	&c.
1. 1. 2.	$\frac{4}{9}$.	2. 1. 2.	$\frac{5}{27}$.	3. 1. 2.	$\frac{6}{81}$.	4. 1. 2.	$\frac{7}{243}$.	&c.
1. 1. 3.	$\frac{13}{27}$.	2. 1. 3.	$\frac{18}{81}$.	3. 1. 3.	$\frac{24}{243}$.	4. 1. 3.	$\frac{31}{729}$.	&c.
1. 1. 4.	$\frac{40}{81}$.	2. 1. 4.	$\frac{58}{243}$.	3. 1. 4.	$\frac{82}{729}$.	4. 1. 4.	$\frac{113}{2187}$.	&c.
&c. . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. .
1. 2. 1.	$\frac{4}{9}$.	2. 2. 1.	$\frac{58}{27}$.	3. 2. 1.	$\frac{6}{81}$.	4. 2. 1.	$\frac{7}{243}$.	&c.
1. 2. 2.	$\frac{17}{27}$.	2. 2. 2.	$\frac{27}{81}$.	3. 2. 2.	$\frac{39}{243}$.	4. 2. 2.	$\frac{53}{729}$.	&c.
1. 2. 3.	$\frac{57}{81}$.	2. 2. 3.	$\frac{102}{243}$.	3. 2. 3.	$\frac{165}{729}$.	4. 2. 3.	$\frac{249}{2187}$.	&c.
1. 2. 4.	$\frac{178}{243}$.	2. 2. 4.	$\frac{338}{729}$.	3. 2. 4.	$\frac{385}{2187}$.	4. 2. 4.	$\frac{947}{6561}$.	&c.
&c. . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. .
1. 3. 1.	$\frac{13}{27}$.	2. 3. 1.	$\frac{18}{81}$.	3. 3. 1.	$\frac{24}{243}$.	4. 3. 1.	$\frac{31}{729}$.	&c.
1. 3. 2.	$\frac{57}{81}$.	2. 3. 2.	$\frac{102}{243}$.	3. 3. 2.	$\frac{165}{729}$.	4. 3. 2.	$\frac{249}{2187}$.	&c.
1. 3. 3.	$\frac{195}{243}$.	2. 3. 3.	$\frac{399}{729}$.	3. 3. 3.	$\frac{729}{2187}$.	4. 3. 3.	$\frac{1227}{6561}$.	&c.
1. 3. 4.	$\frac{616}{729}$.	2. 3. 4.	$\frac{1159}{2187}$.	3. 3. 4.	$\frac{2667}{6561}$.	4. 3. 4.	$\frac{4841}{19683}$.	&c.
&c. . . .	. . . . .	. . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. .
1. 4. 1.	$\frac{40}{81}$.	2. 4. 1.	$\frac{58}{243}$.	3. 4. 1.	$\frac{82}{729}$.	4. 4. 1.	$\frac{113}{2187}$.	&c.
1. 4. 2.	$\frac{178}{243}$.	2. 4. 2.	$\frac{338}{729}$.	3. 4. 2.	$\frac{385}{2187}$.	4. 4. 2.	$\frac{947}{6561}$.	&c.
1. 4. 3.	$\frac{616}{729}$.	2. 4. 3.	$\frac{1353}{2187}$.	3. 4. 3.	$\frac{2667}{6561}$.	4. 4. 3.	$\frac{4841}{19683}$.	&c.
1. 4. 4.	$\frac{1961}{2187}$.	2. 4. 4.	$\frac{4667}{6561}$.	3. 4. 4.	$\frac{10001}{19683}$.	4. 4. 4.	$\frac{19683}{59049}$.	&c.
&c. . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. .

Ecrivez par ordre, sur la même ligne horizontale, les cas 1. 1. 1, 2. 1. 1, 3. 1. 1, etc., c'est-à-dire, les cas *n*. 1. 1, en laissant à droite les intervalles nécessaires

nécessaires pour écrire les sorts correspondans du premier joueur *A*. Écrivez au-dessous les cas *n*. 1. 2, puis les cas *n*. 1. 3, *n*. 1. 4, et ainsi de suite. Séparez par un trait horizontal cette classe de cas de la suivante, composée des cas *n*. 2. 1, *n*. 2. 2, *n*. 2. 3, *n*. 2. 4, etc., que vous écrirez de la même manière, et qui seront suivis et pareillement séparés des cas *n*. 3. 1, *n*. 3. 2, *n*. 3. 3, *n*. 3. 4, etc...., etc. Ecrivez de suite et à côté de ces différens cas les fractions qui expriment le sort de *A*, en commençant par la première ligne horizontale, continuant par la seconde, puis par la troisième, etc.

Pour trouver le sort de *A* correspondant au cas qu'il s'agit de calculer, vous aurez cette règle générale : à la fraction voisine à gauche de celle que vous cherchez, ou à 1, s'il n'y en a point, ajoutez la fraction voisine en dessus, dans la même classe, ou 0, s'il n'y en a point ; ajoutez à leur somme la fraction de même rang de la case supérieure, appartenant à la classe précédente, ou 0, s'il n'y en a point : divisez le tout par 3, et vous aurez la fraction cherchée.

Ainsi, pour trouver le sort de *A* pour le cas de 1. 1. 1, comme il n'y a point de fraction voisine à gauche, ni au-dessus de celle que je cherche, et qu'il n'y a ni case, ni classe supérieure, j'ajoute à 1 0 et 0, et je divise par 3, ce qui donne $\frac{1}{3}$: je calcule ensuite le cas 1. 1. 2, et à la fraction voisine, à gauche, j'ajoute, par les mêmes raisons, 0 et 0, et je divise par 3, ce qui me donne $\frac{1}{9}$; et je vois que pour cette ligne il ne s'agit que de diviser par 3 la fraction précédente.

Dans le cas 1. 1. 2, comme il n'y a point de fraction voisine à gauche, et qu'il n'y a point de case supérieure, j'ajoute 1 et 0 à la fraction voisine en dessus, $\frac{1}{3}$; je divise par 3, et je trouve pour le sort de *A* $\frac{4}{9}$. Dans le cas 2. 1. 2, à $\frac{4}{9}$ et à $\frac{1}{9}$, j'ajoute 0, et le tiers de cette somme $\frac{5}{27}$, est la fraction cherchée, etc.

On trouve avec la même facilité les autres fractions de la 1re. classe : j'appelle 1re. classe, celle des cas où il manque 1 jeu à *B* ; 2e. classe, celle des cas où il lui en manque 2, etc.

Dans le cas 1. 2. 1, comme il n'y a point de fraction voisine à gauche, ni en dessus dans la même classe, j'ajoute 1 et 0 à la fraction de même rang dans la case supérieure, c'est-à-dire, à $\frac{1}{3}$ qui se trouve dans cette case à la première ligne, comme celle que je cherche : je divise par 3, et j'ai $\frac{4}{9}$. Je calcule le cas 2. 2. 1, et à $\frac{4}{9}$ et 0 j'ajoute la fraction $\frac{1}{9}$, qui est la 1re. de la case supérieure ; je divise par 3, et j'ai $\frac{5}{27}$, etc.

Pour calculer le cas 1. 2. 2, j'ajoute 1 à la fraction voisine en dessus $\frac{4}{9}$, et à la fraction en seconde ligne, dans la case supérieure, c'est-à dire, à $\frac{4}{9}$, et en divisant par 3, j'ai $\frac{17}{27}$. Dans le cas 2. 2. 2. j'ajoute à $\frac{17}{27}$, frac-

tion voisine, à gauche, $\frac{5}{27}$, fraction voisine en-dessus, et $\frac{5}{27}$ fraction de même rang dans la classe supérieure, le tiers de la somme $\frac{27}{81}$, est la fraction cherchée : ce qui est évident d'ailleurs. On trouve de même que pour le cas 3. 2. 2, le sort de *A* est le tiers des trois fractions $\frac{27}{81}$, $\frac{6}{81}$ et $\frac{6}{81}$, indiquées par la règle, ou $\frac{37}{243}$, etc.

Observez que cette table fait connaître les sorts des trois joueurs ; car, si les jeux manquans à *A*, *B*, *C*, sont 2. 3. 4, par exemple, le sort de *B* est le même que celui de *A*, pour le cas 3. 2. 4., ou 3. 4. 2, et celui de *C* est le même que celui de *A*, pour le cas 4. 3. 2, ou pour le cas 4. 2. 3, et ainsi des autres.

§. X.

Démonstration de la seconde méthode de Bernoulli pour trouver combien il y a de différentes manières d'amener chacun des nombres de points que peuvent donner plusieurs dés.

Pour mieux faire entendre cette méthode, nous la démontrerons dans l'hypothèse d'un dé à deux faces, marqué 1 sur la première, et 2 sur la seconde.

Si l'on joue avec un seul dé de cette espèce, il est clair qu'il y aura une chance pour avoir le point 1, et une chance pour avoir le point 2.

Si l'on joue avec deux, les points qu'on pourra amener sont 2, 3, 4. Le point 1 du second dé viendra avec le point 1 ou avec le point 2 du premier, il en sera de même du point 2 du second dé. Si le point 1 du second dé vient avec le point 1 du premier, il y aura deux points : on a donc une chance pour 2 points. Si le point 1 du second dé vient avec le point 2 du premier, il y aura 3 points : on a donc encore une chance pour 3 points. De même, si le point 2 du second dé vient avec le point 1 du premier, il y aura trois points : on a donc encore une chance pour 3 points. Enfin, si le point 2 du second dé vient avec le point 2 du premier, on aura 4 points : il y a donc une chance pour 4 points.

Ainsi, les points que peuvent donner deux dés, étant :	2.	3.	4,
les chances respectives pour ces divers points seront. . . .	1.	1	
		1.	1
En tout.	1.	2.	1

Si l'on joue avec trois dés, les points 1 et 2 du troisième dé viendront avec les points 2, 3 ou 4 des deux premiers. Si le point 1 du troisième dé vient avec le point 2 des deux premiers, on aura le point 3. Mais le point 2 des deux premiers n'arrive que d'une manière ; il y a donc une seule chance pour le point 3. Si le point 1 du troisième dé vient avec le point 3 des deux premiers, lequel arrive de deux manières, on aura le point 4 ; il y a donc deux chances pour le point 4. Si le point 1 du troisième dé vient avec le point 4 des deux premiers, qui arrive d'une manière, on aura le point 5 ; il y a donc une chance pour avoir le point 5. De même si le point 2 du troisième dé vient avec le point 2 des deux premiers, qui arrive d'une manière, on aura le point 4; on a donc encore une chance pour avoir le point 4. Si le point 2 du troisième dé vient avec le point 3 des deux premiers, qui arrive de deux manières, on aura le point 5; ce qui donne 2 chances de plus pour le point 5. Enfin, si le point 2 du troisième dé vient avec le point 4 des deux premiers, qui arrive d'une manière, on aura le point 6, pour lequel il y a par conséquent une seule chance.

Ainsi les points qui peuvent donner 3 dés étant . . 3 . 4 . 5 . 6,

les chances correspondantes seront . . . . $\begin{cases} 1 . 2 . 1 \\ \quad 1 . 2 . 1 \end{cases}$

En tout . . . 1 . 3 . 3 . 1

Si l'on joue avec 4 dés, les points 3 . 4 . 5 . 6 des trois premiers venant avec le point 1 du troisième formeront 4 . 5 . 6 . 7, pour lesquels les chances correspondantes seront . . . . . 1 . 3 . 3 . 1

Et venant avec le point 2 du troisième donneront les points. . . . . 5 . 6 . 7 . 8, pour lesquels les chances correspondantes seront encore . . . 1 . 3 . 3 . 1

Donc les chances que peuvent donner 4 dés étant . 4 . 5 . 6 . 7 . 8

$\begin{cases} 1 . 3 . 3 . 1 \\ \quad 1 . 3 . 3 . 1 \end{cases}$

En tout . . 1 . 4 . 6 . 4 . 1

On trouvera de la même manière que si l'on joue avec 5 dés ; les points possibles étant . . . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10,

les chances seront $\begin{cases} 1 . 4 . 6 . 4 . 1 \\ \quad 1 . 4 . 6 . 4 . 1 \end{cases}$

En tout. . . . . 1 . 5 . 10 . 10 . 5 . 1.

D'où l'on peut conclure en général que si l'on joue avec m dés à deux faces, qui donneront $m, m+1,\ m+2,\ m+3$ . . . . $2m$ points

les chances seront $1, m, \frac{m.m-1}{1.2}, \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}$ . . . . . 1.

Nous donnerons ailleurs une formule générale pour trouver combien il y a de manières d'amener un nombre de points donné avec un nombre quelconque de dés, quel que soit le nombre des faces.

§. II.

Formule générale pour déterminer le nombre des chances qu'on a pour amener des points simples avec autant de dés qu'on voudra, quel que soit le nombre des faces du dé.

S'il n'y a qu'un dé;

Il est clair d'abord que s'il n'y a qu'un dé ayant h faces ; il y aura h chances pour avoir des points simples.

S'il y a deux dés;

Chacune des faces de l'un pourra venir avec chacune des faces de l'autre, de sorte que si les faces sont a et b, le second terme $2ab$ du quarré de ce binome désignera deux manières d'avoir des points simples ; ou différens dans les deux dés.

Si le dé a 3 faces, a, b et c, le second terme $2a(b+c)$ du quarré de ce trinome démontrera aux yeux 2.2, et le 3e. terme, $(b+c)^2$, 2 chances pour avoir des points simples.

Si le dé a 4 faces, a, b, c, d, le second et le troisième terme $2a(b+c+d)^2 + (b+c+d)^2$ du quarré de $a+b+c+d$ indiqueront $2.3+2.2+2$, points simples.

On trouvera de la même manière que le nombre des points simples sera 2. 4+2. 3+2. 2+2, si le dé a 5 faces; 2. 5+2. 4+2. 3+2. 2+2. = 2 (5+4+3+2+1) s'il en a 6. Et l'on voit, en général, que si le nombre des faces est h, celui des chances pour avoir des points simples sera $2\,(1+2+3+4+5\ldots+h+1) = 2\,(1+h-1)\,\frac{h-1}{2} = h.\,h-1$.

S'il y a trois dés.

Nous pourrions faire voir aisément qu'avec trois dés à h faces, le nombre des points simples est $3\,\overline{(2^2+3^2+4^2\ldots+\overline{h-1}^2)-(2+3+4\ldots+h-1)} = 3\left(\frac{2h^3-3hh+h-6}{6} - \frac{3hh-3h-6}{6}\right) = h^3-3hh+2h = h.\,h-1.\,h-2.$ Mais on peut s'épargner tout ce calcul de la manière suivante.

On ne pourra avoir des points simples à moins que le dé n'ait plus de deux faces.

S'il en a 3, a, b et c, le cube $a^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+(b+c)^3$ indiquera 3. 2 manières d'avoir ces sortes de points; car ils ne peuvent être indiqués par les termes où a a plus d'une dimension, ni par le dernier terme dans le développement duquel b ou c en ont nécessairement plus d'une: ils ne peuvent donc l'être que par le troisième $3a(b+c)^2$, qui en désigne trois fois autant que $(b+c)^2$ ou 3. 2.

Si le dé a 4 faces a, b, c et d, les points simples seront désignés par les deux derniers termes du cube de $a+b+c+d$, ou par $3a(b+c+d)^2 + (b+c+d)^3$. Or, on vient de voir que le dernier en indique 3. 2; le facteur $(b+c+d)^2$ en indique 3. 2, suivant la formule $h.\,h-1$ précédemment trouvée; et, par conséquent, le terme $3a(b+c+d)^2$ en dénote 3. 3. 2. Le nombre en est donc 3. 2+3. 3. 2=4. 3. 2.

Si le dé a 5 faces, a, b, c, d et e, les deux derniers termes $3a(b+c+d+e)^2+(b+c+d+e)^3$ du cube de $a+b+c+d+e$, indiqueront les points dont il s'agit; le dernier 4. 3. 2, et le précédent 3. 4. 3, d'après la même formule, $h\ h-1$; en tout 4. 3. 2+3. 4. 3=5. 4. 3.

On verra également que si le dé a six faces, le nombre cherché sera 5. 4. 3+3. 5. 4=6. 5. 4; qu'il sera 6. 5. 4+3. 6. 5=7. 6. 5 si le dé a 7 faces; 8. 7. 6 s'il en a 5, et, en général, $h.\,h-1.\,h-2$ s'il en a h.

S'il y a quatre dés.

Les deux derniers termes de la quatrième puissance d'un polynome ayant

autant de lettres que le dé a de faces, feront encore connaître le nombre des chances pour amener des points simples.

S'il y a plus de dés que de faces, il ne peut venir de points simples.

Si le dé a quatre faces, a, b, c, d, les points simples seront indiqués par $4a(b+c+d)^3$, car $(b+c+d)^4$ n'en indique aucun; et la formule $h.\ h-1.\ h-2$ fait voir qu'il y en aura $4.\ 3.\ 2=4.\ 3.\ 2.\ 1$.

Si le dé a h faces, le nombre des points simples est égal au quadruple de ce qu'on en aurait avec un dé de moins et une face de moins, augmenté de ce qu'en donnerait le même nombre de dés avec une face de moins.

Si donc $h=5$, le nombre cherché est $4.\ 4.\ 3.\ 2+4.\ 3.\ 2.\ 1=5.\ 4.\ 3.\ 2$.

Si $h=6$, ce nombre est $4.\ 5.\ 4.\ 3+5.\ 4.\ 3.\ 2=6.\ 5.\ 4.\ 3$.

Si $h=7$, il est $4.\ 6.\ 5.\ 4+6.\ 5.\ 4.\ 3=7.\ 6.\ 5.\ 4$.

Et l'on voit, en général, que si le nombre des faces du dé est h, celui des chances pour amener des points simples est $h.\ h-1.\ h-2.\ h-3$.

On trouverait de même que le nombre des points simples serait $h.\ h-1.\ h-2.\ h-3.\ h-4$, s'il y avait 5 dés; $h.\ h-1.\ h-2.\ h-3\ h-4.\ h-5$, s'il y en avait 6, etc.

S'il y a n *dés à* h *faces.*

On a vu que s'il y a un dé, le nombre des points simples est. h;
que s'il y en a deux, ce nombre est. . . . . $h.\ h-1$;
que s'il y en a trois, ce même nombre est. . . . $h.\ h-1.\ h-2$;
etc.

D'où il est aisé de conclure que s'il y a n dés, le nombre des chances qu'on a pour amener des points simples est $h.\ h-1\ \ h-2\ .\ .\ h-n+1$.

On peut découvrir ce théorème par un raisonnement plus simple, et indépendant des formules précédentes, que nous n'avons indiquées que parce qu'elles peuvent servir à trouver les points doubles, triples, quadruples, etc.

Soit encore h le nombre des faces du dé, et qu'il soit question de savoir combien il y a de manières d'amener des points simples.

S'il n'y a qu'un dé, le nombre cherché est h;

S'il y en a deux, il faudra que chacune des h faces du premier vienne avec quelqu'une des $h-1$ autres faces du second, autrement on aurait des points doubles. Le nombre des points simples est donc $h.\ h-1$.

S'il y a trois dés, il faudra que deux faces différentes dans les deux premiers viennent avec quelqu'une des $h-2$ autres faces du troisième. Mais les deux premiers ne peuvent donner deux faces différentes que de $h.\ h-1$ manières. Donc le nombre des points simples, avec trois dés, est $h.\ h-1.\ h-2$.

Par exemple, avec deux dés ordinaires, on a 30 manières d'avoir des points simples, savoir 1. 2, 1. 3, 1. 4, 1. 5, 1. 6; 2. 1, 2. 3, 2. 4, 2. 5, 2. 6; 3. 1, 3. 2, 3. 4, 3. 5, 3. 6; 4. 1, 4. 2, 4. 3, 4. 5, 4. 6; 5. 1, 5. 2, 5. 3, 5. 4, 5. 6; 6. 1, 6. 2, 6. 3, 6. 4 et 6. 5; mais chacun de ces arrangemens de deux faces ne peut venir qu'avec quelqu'une des quatre autres faces du troisième dé, autrement il y aurait des points doubles : ainsi 1. 2 ne peut venir qu'avec 3. 4, 5 ou 6; 1. 3, qu'avec 2, 4, 5 ou 6, etc. Il y a donc 4. 30 ou 120 manières d'amener des points simples avec trois dés.

On voit également que s'il y a quatre dés, il faudra que trois faces différentes dans les trois premiers viennent avec quelqu'une des $h-3$ autres faces du quatrième; et qu'ainsi le nombre cherché est $h.\ h-1.\ h-2.\ h-3$; qu'avec cinq dés ce nombre est $h.\ h-1.\ h-2.\ h-3.\ h-4$, et qu'avec n dés il est $h.\ h-1.\ h-2 \ldots h-n+1$.

§. XII.

Sur les propositions X et XI.

1. *Formules pour calculer par sauts la probabilité d'amener en plusieurs jets un six avec un dé, ou deux six avec deux dés, etc.*

L'auteur examine dans la proposition X en combien de jets on peut entreprendre d'amener 6 points avec un dé ordinaire, et dans la XIe. en combien de jets on peut entreprendre d'amener sonnez avec deux dés.

Dans la proposition X il calcule successivement les sorts du joueur en supposant qu'il lui soit accordé 1, 2, 3, 4 etc. jets; et en comparant, à chaque supposition, le sort trouvé avec le sort contraire, il cherche à quel nombre de jets répond l'égalité de ces deux sorts, et il trouve que s'il en est accordé 4, le sort du joueur est inférieur à celui de son adversaire, qui l'emporte sur le sien, s'il en est accordé 5; d'où il suit qu'on peut parier avec avantage d'amener le point de 6, ou une face déterminée du dé en 5 jets.

L'auteur suit la même marche dans la proposition XI. Mais, pour arriver plus promptement au nombre jets pour lequel les sorts sont égaux, il calcule le sort du joueur par sauts, c'est-à-dire, qu'ayant trouvé ce sort pour un certain nombre de jets, il part de là pour déterminer celui qui répond à un nombre de jets double, et même qu'après avoir déterminé les sorts pour deux différens nombres de jets, il calcule en conséquence le sort qui a lieu pour la somme de ces nombres. C'est ce qu'on peut exprimer par les formules suivantes.

1. Soit $\frac{p}{p+q}$ la probabilité de réussir en n jets ; la probabilité contraire sera $\frac{q}{p+q}$: de sorte que sur $p+q$ chances le joueur en aura p pour réussir et q pour manquer. Si donc il est accordé $2n$ jets au lieu de n, le joueur a p chances pour réussir aux n premiers et obtenir le dépôt 1, et q chances pour manquer et passer aux n derniers jets qui valent $\frac{p}{p+q}$. Son sort est donc

$$\frac{p.1 + q.\frac{p}{p+q}}{p+q} = \frac{pp+2pq}{p+q}:$$

Soient encore p et q les chances favorables et contraires ; le nombre des jets étant n, et soit de plus $\frac{r}{r+s}$ la probabilité de réussir en m jets : celui à qui il en est accordé $n+m$ a p chances pour obtenir 1, et q chances pour $\frac{r}{r+s}$; ce qui vaut $\frac{p+\frac{qr}{r+s}}{p+q} = \frac{pr+ps+qr}{(p+q)(r+s)}$

Si, dans la première formule, on fait $p+q=a$; ou $p=a-q$; elle devient $\frac{aa-qq}{aa}$.

Si l'on fait de plus $r=b-s$; la seconde formule devient $\frac{a.\overline{b-s}+s.\overline{a-q}}{ab} = \frac{ab-qs}{ab}$.

Ainsi, la probabilité de réussir avec un dé en un jet, étant $\frac{1}{1+5}$; si l'on fait dans la 1[re]. formule $a=6$, $q=5$, on trouvera $\frac{36-25}{36} = \frac{11}{36}$, pour la probabilité de réussir en deux jets. Et si l'on fait $a=36$, $q=25$, on trouvera $\frac{1296-625}{1296} = \frac{671}{1296}$ pour la probabilité de réussir en quatre jets, etc : la probabilité de réussir en un jet étant $\frac{1}{6}$, et celle de réussir en deux jets $\frac{11}{36}$. Si l'on fait, dans la seconde formule, $a=6$, $q=5$, $b=36$, $s=25$, on aura $\frac{216-125}{216} = \frac{91}{216}$, probabilité de réussir en trois jets ; et si, dans la même formule, on fait $a=216$, $q=125$, $b=1296$, $s=625$, on aura pour la probabilité de réussir en

en $3+4$ ou sept jets, $\frac{216.1296-125\,625}{216.1296} = \frac{201811}{279936}$. etc.

Mais ces observations sont peu importantes, car on peut trouver l'expression générale de la probabilité de réussir en un nombre quelconque de jets, soit qu'il s'agisse d'amener un six avec un dé, deux six avec deux dés, trois six avec trois dés, ou une rafle déterminée avec un nombre quelconque de dés.

§. XIII.

Suite du précédent. Formule pour trouver la probabilité d'amener en un nombre donné de jets, une rafle déterminée, avec autant de dés qu'on voudra.

Soit $c+1$ le nombre des faces d'un dé, dont on propose d'amener une face déterminée, en un nombre n de jets; et soit x la probabilité de réussir.

Si $n=1$, $x=\frac{1}{c+1}$.

Si $n=2$, il y a une chance pour avoir le dépôt 1 et c chances pour manquer, et pour avoir à réussir en un jet, ou pour avoir $\frac{1}{c+1}$: donc $x=$

$\frac{1.1+c.\frac{1}{c+1}}{c+1} = \frac{2c+1}{(c+1)^2} = \frac{(c+1)^2-cc}{(c+1)^2}$.

Si $n=3$, il y a une chance pour avoir 1 et c chances pour être dans le cas précédent, ou pour avoir $\frac{(c+1)^2-cc}{(c+1)^2}$, ce qui vaut $\frac{1.1+c.\frac{(c+1)^2-cc}{(c+1)^2}}{c+1} =$ $\frac{(c+1)^2.(1+c)-c^3}{(c+1)^3} = \frac{(c+1)^3-c^3}{(c+1)^3}$.

On trouvera de même que si $n=4$, on aura $x=\frac{(c+1)^4-c^4}{(c+1)^4}$; et il est aisé de voir que si le nombre des jets est n, on aura $x=\frac{(c+1)^n-c^n}{(c+1)^n}$.

Supposons maintenant qu'il s'agisse de savoir quelle est la probabilité d'amener sonnez avec deux dés en n jets. Imaginez un dé à 36 faces, sur lesquelles soient respectivement marqués les divers points que peuvent donner deux dés ordinaires, savoir, 6.6, 6.5, 6.4, etc.; 5.6, 5.5, etc.; 4.6, 4.5, etc. etc. La question est évidemment la même que si l'on demandait quelle est la probabilité d'amener en n jets une face déterminée d'un pareil dé. Si donc on fait $c+1=36$ dans la formule que nous venons de trouver,

on aura ; pour la probabilité cherchée, $\frac{(36)^n-(35)^n}{(36)^n} = \frac{6^{2n}-(6^2-1)^n}{6^{n+2}}$: et telle est aussi la probabilité d'amener deux cinq ou quine , deux quatre ou carme , etc.

S'il faut trouver la probabilité d'amener une rafle déterminée avec trois dés, on imaginera de même un dé à 216 faces, nombre des arrangemens que peuvent donner 3 dés , et l'on fera , dans la formule , $c+1=216=6^3$: ce qui donnera $\frac{(216)^n-(215)^n}{(216)^n} = \frac{6^{3n}-(6^3-1)^n}{6^{3n}}$.

Et l'on voit , en général, que la probabilité d'amener une rafle déterminée avec m dés en n jets, est $\frac{6^{mn}-(6^{m}-1)^n}{6^{mn}}$.

§. XIV.

Expression générale de la probabilité d'amener un hasard en un nombre donné d'épreuves. Différentes manières de la trouver.

S'il fallait amener l'une de plusieurs faces déterminées d'un dé , la probabilité du succès , ou le sort du joueur , se calculerait avec autant de facilité que lorsqu'il s'agit d'amener une face donnée. Par exemple , si le joueur a entrepris d'amener le point 6 ou le point 5 d'un dé ordinaire en un jet , il est clair qu'il a 2 chances pour gagner ou pour avoir 1 , et 4 chances pour manquer ou pour avoir o , ce qui vaut $\frac{2}{2+4}$. S'il a entrepris d'amener l'un ou l'autre point en deux jets , il a deux chances pour avoir 1 au premier jet, et 4 chances pour manquer et pour avoir à réussir en un jet ou pour avoir $\frac{2}{2+4}$; son sort est donc $\frac{2.1+4.\frac{2}{2+4}}{2+4} = \frac{2.(2+4)+2.4}{(2+4)^2} = \frac{2^2+2.2.4}{(2+4)^2} = \frac{(2+4)^2-4^2}{(2+4)^2}$. S'il s'agit de réussir en trois jets, le joueur a deux chances pour avoir 1 au premier jet ; et 4 chances pour manquer et pour avoir à réussir en deux jets, ou pour $\frac{(2+4)^2-4^2}{(2+4)^2}$, et partant son sort est $\frac{2.1+4.\frac{(2+4)^2-4^2}{(2+4)^2}}{2+4} = \frac{2.(2+4)^2+4(\overline{2+4}^2-4^2)}{(2+4)^3} = \frac{(2+4\cdot 2+4)^2-4^3}{(2+4)^3} = \frac{(2+4)^3-4^3}{(2+4)^3}$. Il n'est pas plus difficile de trouver

que la probabilité de réussir en 4 jets est $\frac{(2+4)^4-4^4}{(2+4)^4}$, et de voir en général que la probabilité de réussir en n jets est $\frac{6^n-4^n}{6^n}$.

Soient maintenant b le nombre des faces favorables au joueur, c le nombre des autres faces, et x la probabilité de réussir en n jets.

Si $n=1$, le joueur a b chances pour réussir ou pour avoir le dépôt 1; et c pour manquer ou pour avoir o. Donc $x=\frac{b}{b+c}$.

Si $n=2$, il y a b chances pour avoir 1, et c chances pour $\frac{b}{b+c}$.

Donc $x=\frac{b+c.\frac{b}{b+c}}{b+c}=\frac{bb+2bc}{(b+c)^2}=\frac{(b+c)^2-cc}{(b+c)^2}$.

Si $n=3$, il y a b chances pour 1, et c pour $\frac{(b+c)^2-cc}{(b+c)^2}$. Donc $x=$
$\frac{b+c.\frac{(b+c)^2-cc}{(b+c)^2}}{b+c}=\frac{b.(b+c)^2+c.(\overline{b+c}^2-c^2)}{(b+c)^3}=\frac{(b+c.b+c)^2-c^3}{(b+c)^3}=$
$\frac{(b+c)^3-c^3}{(b+c)^3}$.

Si $n=4$, il y a encore b chances pour 1, et c chances pour $\frac{(b+c)^3-c^3}{(b+c)^3}$.

Donc $x=\frac{b+c\frac{(b+c)^3-c^3}{(b+c)^3}}{b+c}=\frac{b.(b+c)^3+c(\overline{b+c}^3-c^3)}{(b+c)^4}=\frac{(b+c.b+c)^3-c^4}{(b+c)^4}$
$=\frac{(b+c)^4-c^4}{(b+c)^4}$.

De même si $n=5$, $x=\frac{(b+c)^5-c^5}{(b+c)^5}$; et s'il faut réussir en n jets, la probabilité du succès est $\frac{(b+c)^n-c^n}{(b+c)^n}$.

Tel est évidemment le sort de celui qui parie d'amener un hasard proposé en n épreuves, et qui à chaque épreuve a b chances favorables et c chances contraires.

Comme ce problème est important, et qu'il s'agit principalement de faire connaître toutes les ressources de l'art à ceux qui n'y sont pas initiés, nous ne craindrons pas d'insister et d'offrir au lecteur différentes ma-

nières de le résoudre, ou même de le lui présenter sous diverses formes.

Soit $b + c = a$

La probabilité de réussir en une épreuve sera $\frac{b}{a}$.

Si l'on parie de réussir en deux épreuves, on aura b chances pour 1 et c chances pour $\frac{b}{a}$ ce qui vaut $\frac{b + c \cdot \frac{b}{a}}{a} = \frac{ab + bc}{aa} = \frac{b}{aa}(a + c)$.

Si l'on parie de réussir en trois épreuves, on aura b chances pour 1, et c pour $\frac{b}{aa}(a+c)$, ce qui vaut $\frac{b + \frac{bc}{aa}(a+c)}{a} = \frac{b}{a^3}(aa + ac + cc)$.

Si l'on parie de réussir en quatre épreuves, on aura b chances pour 1; et c pour $\frac{b}{a^3}(aa + ac + cc)$, et partant on aura pour sort $\frac{b + \frac{bc}{a^3}(aa + ac + cc)}{a}$ $= \frac{b}{a^4}(a^3 + aac + acc + c^3)$.

On trouve de même que la probabilité de réussir en cinq épreuves est $\frac{b}{a^5}(a^4 + a^3c + aacc + ac^3 + c^4)$, et en général que la probabilité de réussir en n épreuves est $\frac{b}{a^n}(a^{n-1} + a^{n-2}c + a^{n-3}cc \ldots + c^{n-1})$.

Le second facteur que j'appelle F, est une suite de termes en progression géométrique composée de deux autres progressions, savoir :

$$\left.\begin{matrix} a^{n-1}, & a^{n-2}, & a^{n-3} \ldots\ldots & 1 \\ 1, & c, & cc \ldots\ldots & c^{n-1} \end{matrix}\right\}$$ multipliées terme à terme, ce qui donne cette règle.

Formez deux progressions géométriques, l'une dans la raison inverse de 1 au nombre total des chances, commençant par la puissance de ce nombre inférieur d'une unité à celui des épreuves, et finissant par l'unité; l'autre dans la raison directe de 1 au nombre des chances contraires, finissant par ce nombre élevé à la puissance déjà indiquée, et commençant par l'unité; multipliez ces deux progressions terme à terme, et le tout par le nombre des chances favorables; divisez le produit par la somme des chances élevée à la puissance désignée par le nombre des épreuves : le quotient sera la probabilité de réussir.

On voit, au surplus, que le facteur F n'est que la série de tous les termes

de la puissance $n-1$ de $a+c$, dégagés de leurs coëficiens. Ces termes formant une progression géométrique dans la raison de $a : c$, leur somme est $\frac{a^n-c^n}{a-c} = \frac{a^n-c^n}{b}$. Donc le sort cherché, $\frac{b}{a^n} F = \frac{b}{a^n} \cdot \frac{a^n-c^n}{b} = \frac{a^n-c^n}{a^n}$, comme ci-devant.

Mais il était facile de donner à la formule $\frac{a^n-c^n}{a^n}$ les formes qu'on vient de voir; car elle est évidemment la même que $\frac{b}{a^n} \cdot \frac{a^n-c^n}{a-c}$. Et si l'on développe le second facteur en divisant a^n-c^n par $a-c$, on trouvera pour quotient $a^{n-1}+a^{n-2}c+a^{n-3}cc \ldots +c^{n-1}$

On peut trouver la même formule d'une manière plus simple.

Si je parie contre un joueur qu'il amènera à chaque jet la face B d'un dé ayant c faces B et b faces A, et que la partie soit en n jets, mon sort est $\frac{c}{a}$, si $n=1$. Si $n=2$, j'ai b chances pour perdre, ou pour o, et c chances pour le sort précédent $\frac{c}{a}$, ce qui vaut $\frac{cc}{aa}$. Si $n=3$, j'ai b chances pour o et c pour $\frac{cc}{aa}$: mon sort est donc $\frac{c^3}{a^3}$. Si $n=4$, j'ai b chances pour o et c pour $\frac{c^3}{a^3}$, et j'ai pour sort $\frac{c^4}{a^4}$; et il est visible que la partie étant en n jets, mon sort est $\frac{c^n}{a^n}$. Le sort contraire est $1-\frac{c^n}{a^n} = \frac{a^n-c^n}{a^n}$. Or, le sort contraire est celui du joueur qui parie que la face B ne viendra pas à tous les jets, ou qui entreprend d'avoir la face A au moins une fois en n jets. Donc le sort de ce joueur est $\frac{a^n-c^n}{a^n}$

Les deux méthodes données par Bernoulli n'ont pas besoin d'explication: nous ajouterons les deux suivantes.

1. Il faut observer, quant à la première, que la somme des coëfficiens de la puissance n d'un binome est 2^n, d'un trinome 3, d'un quatrinome 4^n...., d'un p.^{nome} p^n.

Soit un dé aux six faces A, B, C, D, E, F, et qu'il soit question de savoir combien il y a de chances pour amener au moins une fois la face A en n jets.

Il est clair qu'il y en a une sur six pour l'amener au premier jet.

Pour savoir combien il en y a pour l'amener soit au premier soit au second

jet, il faut considérer que chacune des faces qu'offrira le premier jet pourra venir avec chacune de celles qu'offrira le second; de sorte que si l'on exprime le quarré de $A+B+C+D+E+F$ de cette manière $A^2+2A(B+C+D+E+F)+(B+C+D+E+F)^2$, on voit aisément qu'il y a une chance pour avoir la face A tant au premier qu'au second jet; qu'il y en a 2.5, pour avoir la face A à l'un, et B ou C, etc., ou F à l'autre, et qu'il y en a 5^2 pour n'avoir la face A ni à l'un ni à l'autre: c'est-à-dire, que le nombre des A^2 est 1, que celui des A^1 est 2.5, et celui des $A^0\ 5^2$.

De là il est aisé de conclure que si le nombre des faces du dé est h, le nombre des A^2 est 1; celui des A^1, $2(h-1)$; et des A^0, $h-1$.

On verra de même que s'il est accordé trois jets pour amener la face A d'un dé ayant les six faces A, B, C, D, E, F, le nombre des A^3 sera 1; celui des A^2, 3.5; celui des $A^1, 3.5^2$; et celui des A^0, 5^3; et que si le nombre des faces du dé est h, le nombre des A^3 sera 1; celui des A^2, $3.(h-1)$; celui des A^1, $3.(h-1)^2$; et celui des A^0, $(h-1)^3$.

Et s'il est accordé 4 jets, le nombre des faces du dé étant h, le nombre des A^4 sera 1; celui des A^3, $4.(h-1)$; celui des A^2, $6(h-1)^2$; celui des A^1, $4.(h-1)^3$; et celui des A^0, $(h-1)^4$.

Si donc il est accordé n jets, pour amener au moins une face déterminée, A, d'un dé ayant h faces différentes, on aura

Pour les A^n. . . . 1.
Pour les A^{n-1} . . . $n.(h-1)$.
Pour les A^{n-2} . . . $\frac{n.n-1}{1.2}(h-1)^2$
Pour les A^{n-3} . . . $\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}(h-1)^3$
Etc.
Pour les A^1 . . . $n.(h-1)^{n-1}$.
Et pour les A^0 . . $(h-1)^n$.

C'est-à-dire que le nombre des chances pour amener la face A, est

$$1+n.(h-1)+\frac{n.n-1}{1.2}(h-1)^2+\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}(h-1)^3 \ldots +n.(h-1)^{n-1}.$$

Le nombre des chances contraires est $(h-1)^n$. Si donc on divise chacune de ces quantités par la totalité des chances h^n, on aura le sort favorable et le sort contraire, le dépôt étant un, ce dernier sort est $\frac{(h-1)^n}{h^n}$; ce qui donne une expression plus simple du sort favorable $= 1-\frac{(h-1)^n}{h^n} =$

$\frac{h^n-(h-1)^n}{h^n}$, ou (si l'on fait $h=c+1$) $\frac{(c+1)^n-c^n}{(c+1)^n}$, formule trouvée précédemment.

Supposons maintenant que le dé ayant b faces A et c faces B, le nombre des jets accordés pour amener la face A soit encore n. Si l'on élève $bA+cB$, la puissance n, pour avoir

$b^n A^n + nb^{n-1}c^1 A^{n-1}B + \frac{n.n-1}{1.2} b^{n-2}c^2 A^{n-2}B^2 \ldots + nbc^{n-1}AB^{n-1} + c^n B^n$, on verra que la totalité des chances étant $(b+c)^n$, le nombre des chances favorables sera $b^n + nb^{n-1}c + \frac{n.n-1}{1.2} b^{n-2}c^2 \ldots + nbc^{n-1}$, et le nombre des chances contraires c^n. Le sort contraire sera donc $1-\frac{c^n}{(b+c)^n}=\frac{(b+c)^n-c^n}{(b+c)^n}=\frac{a^n-c^n}{a^n}$, si l'on fait $b+c=a$. C'est-à-dire, que si l'on a b chances pour amener un hasard, et c chances pour le manquer en une épreuve, en tout $b+c=a$, et n épreuves pour le tenter, on a pour sort $\frac{a^n-c^n}{a^n}$: car il est clair que la probabilité de réussir est la même que si l'on entreprenait d'amener en n jets la face A d'un dé ayant b faces A et c faces B, en tout $b+c=a$.

2. Je fonde la dernière méthode sur ce principe évident qu'au commencement du jeu les choses doivent être considérées comme si après un nombre quelconque de jets ou d'épreuves, le dépôt était diminué de la valeur de ces jets.

Par exemple, si avec un dé ordinaire j'entreprends d'amener le six, le premier jet vaudra $\frac{1}{6}$. Donc au commencement du jeu ce premier jet dont l'événement est incertain doit être considéré comme diminuant le dépôt 1 de $\frac{1}{6}$, et partant le dépôt doit être regardé comme n'étant plus que de $\frac{5}{6}$ pour le second jet. Donc au second jet j'ai 1 chance pour avoir $\frac{5}{6}$ et 5 chances pour 0, le second jet vaut donc $\frac{5}{36}$. Donc le premier et le second valent $\frac{1}{6}+\frac{5}{36}=\frac{11}{36}$. Donc au troisième jet le dépôt ne vaut plus que $1-\frac{11}{36}=\frac{25}{36}$. Ainsi en passant au troisième jet j'ai 1 chance pour $\frac{25}{36}$ et 5 chan-

ces pour o, et partant ce jet vaut $\frac{25}{216}$. Donc les trois premiers jets valent $\frac{11}{36}+\frac{25}{216}=\frac{91}{216}$, et il reste $1-\frac{91}{216}=\frac{125}{216}$ pour le quatrième jet qui vaut $\frac{125}{1296}$: de sorte que les 4 premiers jets valent $\frac{91}{216}+\frac{125}{1296}=\frac{671}{1296}$, etc. C'est-à-dire, que la probabilité d'amener le 6 en un jet est $\frac{1}{6}$, celle de l'amener en deux jets $\frac{11}{36}$, celle de l'amener en trois jets $\frac{91}{216}$, celle de l'amener en quatre jets $\frac{671}{1296}$, etc.

Soient, comme ci-devant, b et c les nombres des chances pour réussir et pour manquer en une épreuve, n le nombre des épreuves et $b+c=a$. La première épreuve vaudra $\frac{b}{a}$. Cette valeur étant déduite du dépôt, il restera $1-\frac{b}{a}=\frac{a-b}{a}=\frac{c}{a}$.

La seconde épreuve vaudra donc $\frac{bc}{aa}$; car il y aura b chances pour obtenir le reste du dépôt $\frac{c}{a}$ et c chances pour o, ce qui vaut $\frac{b\,\frac{c}{a}+c.o}{b+c}=\frac{bc}{a(b+c)}=\frac{bc}{aa}$; il restera $\frac{c}{a}-\frac{bc}{aa}=\frac{(a-b)c}{aa}=\frac{cc}{aa}$.

Donc la troisième épreuve vaudra $\frac{b.\frac{cc}{aa}+c.o}{a}=\frac{bcc}{a^3}$, et il restera $\frac{cc}{aa}-\frac{bcc}{a^3}=\frac{(a-b)cc}{a^3}=\frac{c^3}{a^3}$.

Donc la quatrième épreuve vaudra $\frac{bc^3}{a^4}$.

Et ainsi de suite.

La n^e. épreuve vaudra donc $\frac{bc^{n-1}}{a^n}$.

Ainsi le sort ou la probabilité de réussir est $\frac{b}{a}+\frac{bc}{aa}+\frac{bcc}{a^3}+\frac{bc^3}{a^4}\ldots\ldots+\frac{bc^{n-1}}{a^n}$, progression géométrique dont le quotient

tient est $\frac{c}{a}$ et la somme $\left(\frac{c}{a} \cdot \frac{bc^{n-1}}{a^n} - \frac{b}{a}\right) \cdot \frac{a}{c-a} = \frac{b(c^n-a^n)}{a^n \cdot -b} = \frac{a^n-c^n}{a^n}$, comme ci-dessus.

§. XV.

Applications du précédent.

Il est facile maintenant de résoudre le problème général, auquel se rapportent les deux problèmes particuliers des propositions X et XI. Il consiste à trouver en combien d'épreuves on peut entreprendre d'amener un hasard, contre lequel il y a c chances, le nombre de toutes les chances étant a, ou, ce qui est la même chose, pour lequel il y a b chances favorables, le nombre des chances contraires étant c, et en supposant $b+c=a$.

Demander en combien d'épreuves le joueur peut entreprendre d'amener le hasard proposé, c'est demander combien il doit lui être accordé d'épreuves, pour que le jeu soit juste, c'est-à-dire, pour que son sort soit égal à celui de son antagoniste, ou au sort contraire. Soit x le nombre de jets cherché, les sort du joueur est $\frac{a^x-c^x}{a^x}$; et partant, le sort contraire est $1-\frac{a^x-c^x}{a^x} = \frac{c^x}{a^x}$. On a donc $\frac{a^x-c^x}{a^x}=\frac{c^x}{a^x}$, ou a^x-2c^x; et en prenant les logarithmes $xla=l2 = xlc$, d'où l'on tire $x=\frac{l2}{la-lc}$; il est clair que le nombre des jets doit être tel qu'il y ait autant de probabilité pour que contre l'événement; alors, le sort est $\frac{1}{2}$: on a donc $\frac{a^x-c^x}{a^x}=\frac{1}{2}$, ou $2a^x-2c^x=a^x$, ou $a^x=2c^x$, etc.

Si l'on veut savoir quel doit être le nombre des épreuves pour que le sort du joueur soit double de celui de son adversaire, il faut faire $\frac{a^x-c^x}{a^x} = \frac{2c^x}{a^x}$; d'où l'on tire $\frac{a^x}{c^x}=3$, et $x=\frac{l3}{la-lc}$, valeur qu'on aurait également trouvée en faisant $\frac{a^x-c^x}{a^x}=\frac{2}{3}$. Cette valeur de x est le nombre des épreuves qu'il faudrait accorder au joueur, pour qu'il pût parier deux contre un d'amener le hasard proposé.

On trouvera de même quel doit être le nombre des épreuves pour que le joueur puisse parier p contre q, ou pour que son sort soit à celui de son

adversaire, comme p est à q; car on aura $\frac{a^x-c^x}{a^x} : \frac{c^x}{a^x} :: p:q$, ou $a^x-c^x : c^x :: p:q$; ce qui donne $\frac{a^x}{c^x}-1=\frac{p}{q}$, ou $\frac{a^x}{c^x}=\frac{p+q}{q}$; d'où l'on tire $x=\frac{l.\overline{p+q}-lq}{la-lc}$. On aurait trouvé cette même valeur de x, en faisant le sort du joueur $\frac{a^x-c^x}{a^x}=\frac{p}{p+q}$; car le sort contraire est $1-\frac{p}{p+q}=\frac{q}{p+q}$, qui est à $\frac{p}{p+q} :: q : p$.

Soit s le sort du joueur, et $\frac{a}{c}=r$. On a $\frac{c^n r^n-c^n}{c^n r^n}=s=\frac{r^n-1}{r^n}$, équation qui répond à cette question générale : *de ces trois choses, le sort du joueur, le nombre des épreuves, et le rapport de la totalité des chances au nombre des chances contraires au joueur, deux quelconques étant données, trouver la troisième.* Si c'est le sort qui est inconnu, l'équation en désigne explicitement la valeur; si c'est le nombre des jets, l'équation donne $r^n s=r^n-1$, ou $r^n(1-s)=1$, et partant $nlr+l.\overline{1-s}=0$; d'où $n=-\frac{l\,\overline{1-s}}{lr}$. Si l'on cherche le rapport du nombre de toutes les chances à celui des chances contraires au joueur, l'équation donnera $r^n=\frac{1}{1-s}$, et $r=\frac{1}{\sqrt[n]{1-s}}$. Supposons qu'il soit accordé deux épreuves, et que le sort soit $\frac{5}{9}$. On a $r=\frac{a}{c}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{5}{9}}}=\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$. Et si b est le nombre des chances favorables, on a $\frac{b+c}{c}=\frac{3}{2}$, ou $2b=c$; c'est-à-dire, que le nombre des chances favorables est à celui des chances contraires comme 1 est à 2. En effet, si la partie était en une épreuve, le sort serait $\frac{1}{3}$: le joueur a donc une chance pour avoir 1, et 2 chances pour $\frac{1}{3}$. Donc, il a pour sort $\frac{1+\frac{2}{3}}{3}=\frac{5}{9}$.

La formule qu'on vient de voir nous donnera une solution fort simple d'un problème proposé par Bernoulli. On s'uppose qu'au premier de m joueurs, il soit accordé n épreuves, et l'on demande combien il doit en être accordé au second, au troisième, etc., pour que les sorts de tous les joueurs soient égaux. Nous appliquerons à ce problème la méthode suivante :

Soit x le nombre des épreuves qui doivent être accordées au second joueur.

Le sort des deux joueurs ensemble est $\frac{r^{n+x}-1}{r^{n+x}}$, et celui du premier joueur est $\frac{r^n-1}{r^n}$. Donc le sort du second est $\frac{r^{n+x}-1}{r^{n+x}} - \frac{r^n-1}{r^n}$. Or le sort du second doit être égal à celui du premier. Donc on a $\frac{r^{n+x}-1}{r^{n+x}} - \frac{r^n-1}{r^n} = \frac{r^n-1}{r^n}$, ou $1-\frac{1}{r^{n+x}} = 2-\frac{2}{r^n}$, ou $\frac{1}{r^{n+x}} = \frac{2-r^n}{r^n}$, ou $r^{n+x} = \frac{r^n}{2-r^n}$, et partant $\overline{n+x}.\,lr = nlr - l(2-r^n)$ et $x = \frac{nlr - l(2-r^n)}{lr} - n = -\frac{l(2-r^n)}{lr}$.

Soit, maintenant, $x=A$, et soient de plus y le nombre des jets ou des épreuves du troisième joueur, et $n+A=p$. Le sort du troisième joueur est $\frac{r^{p+y}-1}{r^{p+y}} - \frac{r^p-1}{r^p}$, et est égal à chacun des deux premiers ou à $\frac{1}{2}\frac{r^p-1}{r^p}$; de sorte qu'on a $\frac{r^{p+y}-1}{r^{p+y}} = \frac{3}{2}\frac{r^p-1}{r^p} = \frac{3r^p-3}{2r^p} = \frac{3r^{p+y}-3r^y}{2r^{p+y}}$ ou $\frac{2r^{p+y}-2}{2r^{p+y}} = \frac{3r^{p+y}-3r^y}{2r^{p+y}}$, d'où l'on tire $r^y = \frac{2}{3-r^p}$. Donc $y\,lr = l2 - l(3-r^p)$ et $y = \frac{l2 - l(3-r^p)}{lr} = B$.

On trouverait de la même manière les nombres de jets qui devraient être accordés aux joueurs suivans. Mais on peut abréger le calcul, en comprenant tous les sorts dans une même formule.

Soient pour cela q le nombre des jets des $m-1$ premiers joueurs ensemble, et z le nombre de ceux du dernier joueur. La valeur des m sorts collectivement pris, ou des $q+z$ jets sera $\frac{r^{q+z}-1}{r^{q+z}}$; celle des $m-1$ premiers sorts ensemble et des q premiers jets sera $\frac{r^q-1}{r^q}$; et partant la valeur du m.e sort ou de celui du dernier joueur, ou la valeur des z derniers jets sera $\frac{r^{q+z}-1}{r^{q+z}} - \frac{r^q-1}{r^q}$; et comme ce sort doit être égal à chacun des $m-1$ sorts précédens, on aura $\frac{r^{q+z}-1}{r^{q+z}} - \frac{r^q-1}{r^q} = \frac{r^q-1}{(m-1)\,r^q}$ ou $\frac{r^{q+z}-1}{r^{q+z}} = \left(1+\frac{1}{m-1}\right)$

$\frac{r^A-1}{r^q}=\frac{mr^q-m}{(m-1)r^q}$; ou $(m-1)\,r^{q+z}-(m-1)=mr^{q+z}-mr^z$; ou $r^{q+z}=$ $mr^z-(m-1)$: d'où l'on tire $r^z=\frac{m-1}{m-r^q}$. Donc $z=\frac{l(m-1)-l(m-r^q)}{lr}$.

Soient maintenant A, B, C, D, etc. les nombres de jets qui doivent être accordés aux 2e, 3e, 4e, 5e, etc. joueurs. Il est clair qu'on aura :

A, en substituant dans la formule 2 à m et n à q;

B, en y substituant 3 à m et $n+A$ à q;

C, en y substituant 4 à m et $n+A+B$ à q;

D, en y substituant 5 à m et $n+A+B+C$ à q;

etc.

§. XVI.

Sur la proposition XII. Exposition générale de la méthode et détail du calcul de l'auteur.

Le problème qu'il s'agit de résoudre consiste à trouver avec combien de dés on peut entreprendre d'amener deux six au premier jet, ou, ce qui est la même chose, en combien de jets on peut parier d'amener deux six avec un dé. L'auteur traite ce problème comme celui de la proposition X, c'est-à-dire qu'il calcule successivement les probabilités d'amener deux six en 1, 2, 3, 4, etc. jets, en comparant à chaque fois la probabilité trouvée avec la probabilité contraire, ou avec son complément à l'unité, jusqu'à ce qu'elles soient à peu près égales. Le nombre de jets nécessaire pour cela, est celui que le joueur a le droit de demander.

Le calcul est facile, et la question se réduit à celle-ci : *étant données les deux probabilités d'amener une fois le six, et de l'amener deux fois avec un jet de moins, trouver celle de l'amener deux fois avec le nombre de jets proposé.* En effet, soient $n+1$ ce nombre de jets, s le numérateur de la probabilité d'amener une fois le six et t le numérateur de celle de l'amener deux fois en n jets : je dis que la probabilité de l'amener deux fois en $n+1$ jets est $\frac{s+5t}{6^{n+1}}$. Car 6^n est le dénominateur de chacune des deux fractions qui ont pour numé-

rateur s et t. Or, celui qui entreprend d'amener 2 fois le 6 en $n+1$ jets avec un dé, a 1 chance pour l'amener au premier, et par conséquent, pour avoir à l'amener encore une fois en n jets ou pour avoir $\frac{s}{6^n}$, et 5 chances pour manquer au premier ou pour avoir à amener deux fois le six en n jets ou pour $\frac{t}{6^n}$ Son sort est donc $\frac{s+5t}{6^{n+1}}$. Par exemple, l'auteur trouve qu'avec trois jets la probabilité d'amener deux fois le six est $\frac{16}{216}$. Mais, d'après la formule $\frac{a^n-c^n}{a^n}$ qu'on a vue au § XII, celle d'amener le six une fois en trois jets est $\frac{6^3-5^3}{6^3}=\frac{91}{216}$. De ces deux probabilités se déduit celle d'amener deux fois le six en quatre jets : car si l'on a le six au premier, il reste à l'amener encore une fois en trois jets; et si l'on a un autre point au premier, il faut amener deux fois le six en trois jets. On a donc une chance pour $\frac{91}{216}$, et 5 chances pour $\frac{16}{216}$, ce qui vaut $\frac{171}{216}$.

La formule $\frac{6^n-5^n}{6^n}$ fait connaître que les probabilités d'amener une fois le six en, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 jets sont telles qu'on les voit au tableau suivant, qui présente toute la suite de l'opération.

Nombre des jets accordés.	Probabilités d'amener une fois le six.	Probabilités d'amener deux fois le six.	
1	$\frac{1}{6}$		0
2	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}+5.0.\right)$ . . . . . . =	$\frac{1}{36}$
3	$\frac{91}{216}$	$\frac{1}{6}\left(\frac{11}{36}+5.\frac{1}{36}\right)$ . . . . . . =	$\frac{16}{216}$
4	$\frac{671}{1296}$	$\frac{1}{6}\left(\frac{91}{216}+5.\frac{16}{216}\right)$ . . . . =	$\frac{171}{1296}$
5	$\frac{4651}{7776}$	$\frac{1}{6}\left(\frac{671}{1296}+5.\frac{171}{216}\right)$ . . . =	$\frac{1526}{7776}$
6	$\frac{31031}{46656}$	$\frac{1}{6}\left(\frac{4651}{7776}+5.\frac{1526}{7776}\right)$ . . =	$\frac{12251}{46656}$
7	$\frac{201811}{279936}$	$\frac{1}{6}\left(\frac{31031}{46656}+5.\frac{12251}{46656}\right)$ . . =	$\frac{92436}{279936}$
8	$\frac{1288991}{1679616}$	$\frac{1}{6}\left(\frac{20\,811}{279936}+5.\frac{92436}{279936}\right)$ . . =	$\frac{663991}{1679616}$
9	$\frac{8124571}{10077696}$	$\frac{1}{6}\left(\frac{1288991}{1679616}+5.\frac{663991}{1679616}\right)$ =	$\frac{4608946}{10077696}$
10	$\frac{50700551}{60466176}$	$\frac{1}{6}\left(\frac{8124571}{10077696}+5.\frac{4608946}{10077696}\right)$ =	$\frac{31169301}{60466176}$

La probabilité d'amener deux fois le six en 9 jets étant $\frac{4608946}{10077669}$, la probabilité contre est $1 - \frac{4608946}{10077669} = \frac{5468750}{10077696}$. Ainsi la probabilité pour est à la probabilité contre, comme 4608946 à 5468750.

Mais la probabilité d'amener deux fois le six en dix jets étant $\frac{31169301}{60466176}$, et la probabilité contre $1 - \frac{31169301}{60466176} = \frac{29296875}{60466176}$, la probabilité pour est à la probabilité contre comme 31169301 est à 29296875.

Il y a donc du désavantage à parier d'amener deux fois le six en neuf jets, mais il y a de l'avantage à parier de l'amener deux fois en dix.

On trouverait de la même manière en combien de jets on pourrait parier d'amener 3, 4, 5, 6, etc. fois le six en trois jets ou 4, 5, 6, etc. en quatre jets, etc.; mais il est beaucoup plus simple de chercher l'expression générale de la probabilité pour un nombre n de jets, parce qu'en substituant à n différentes valeurs dans la formule une fois trouvée, on voit si et de combien la probabilité s'éloigne ou s'approche de la probabilité contraire, ou de $\frac{1}{2}$, sans la calculer pour chaque nombre de jets, parce que le calcul est fait une fois pour toutes. On résoudrait également le problème, quel que fût le nombre des faces du dé, et il faut en donner la solution, quel que soit encore le nombre de celles qu'il s'agit d'amener.

Soient donc $b+c=a$, le nombre des faces du dé, b le nombre de celles qui sont favorables au joueur, c le nombre de celles qui lui sont contraires. La question est de savoir quelle probabilité il a de réussir m fois en n jets. Il est visible qu'elle ne diffère pas de la question suivante.

§. XVII.

Quelle est la probabilité d'avoir m *fois en* n *épreuves, un hasard pour lequel il y a* b *chances à chaque épreuve, le reste des chances étant* a—b=c?

Ce problème comprend celui du §. XII, qui n'en est qu'un cas particulier, où la probabilité cherchée est $\frac{a^n - c^n}{a^n}$, dont le numérateur est composé des n premiers termes de la puissance n de $b+c$.

L'énoncé présente deux questions; car la probabilité qu'il faut trouver est ou celle d'amener le hasard proposé m fois au moins, ou précisément m fois,

c'es-à-dire m fois, ou plus, ou m fois, ni plus ni moins. Le problème va être traité de différentes manières sous chacune de ces acceptions.

Bernoulli l'a résolu dans le premier sens, en cherchant, non la probabilité de réussir, mais celle de manquer, comme étant d'une expression plus simple : ce qui n'a pourtant lieu que quand $m < \frac{n+1}{2}$, ainsi que nous le verrons incessamment ; mais il suffit que le nombre des termes de la série générale soit plus petit pour les premières valeurs de m. Cependant, il est facile de trouver directement la probabilité de réussir.

Nous avons d'abord à déterminer la probabilité de réussir dans le cas de $m=n$.

Supposons donc que le joueur entreprenne d'amener le hasard une fois en un coup ou en une épreuve : il y a b chances pour réussir et avoir 1, et c chances pour manquer et avoir 0 ; ce qui vaut $\frac{b.1+c.0}{b+c} = \frac{b}{a}$. S'il parie d'amener le hasard deux fois en 2 coups, il a b chances pour réussir au premier, et avoir à réussir une fois en un coup, ce qui vaut $\frac{b}{a}$, et c chances pour manquer au premier, et avoir à réussir 2 fois en un coup, ce qui est impossible, et le fait perdre : son sort est donc $\frac{b.\frac{b}{a}+c.0}{a} = \frac{bb}{aa}$. S'il entreprend d'amener le hasard trois fois en trois coups, il a b cas pour avoir à l'amener deux fois en deux coups, ou pour $\frac{bb}{aa}$, et c cas pour manquer ou pour 0 ; et son sort est $\frac{b^3}{a^3}$. On trouve de même que, s'il s'agit de réussir 4 fois en 4 coups, le sort est $\frac{b^4}{a^4}$, et l'on voit en général que la probabilité de reussir n fois en n coups, est $\frac{b^n}{a^n}$: ce qui offre une nouvelle solution du problème du §. XII ; car, si l'adversaire du joueur parie que le hasard manquera n fois en n coups, son sort est $\frac{c^n}{a^n}$: le sort du joueur est donc $1-\frac{c^n}{a^n} = \frac{a^n-c^n}{a_n}$; et cette probabilité est évidemment celle d'avoir le hasard au moins une fois en n coups.

On vient de voir que si le joueur parie d'amener le hasard 2 fois en 2 coups

coups ; son sort est $\frac{bb}{aa}$. S'il parie de l'amener 2 fois en trois coups ; il a b chances pour l'amener au premier, et pour avoir à l'amener 1 fois en 2 coups, ou pour $\frac{aa-cc}{aa} = \frac{bb+2bc}{aa}$, et c chances pour manquer ou pour avoi à réussir 2 fois en 2 coups, ou pour $\frac{bb}{aa}$. Son sort est donc $\frac{1}{b+c}\left(b.\frac{bb+2bc}{aa}+c.\frac{bb}{aa}\right) = \frac{b^3+3bbc}{a^3}$. S'il parie de réussir 2 fois en 4 coups, il a b chances pour avoir à réussir 1 fois en 3 coups, ou pour $\frac{a^3-c^3}{a^3} = \frac{b^3+3bbc+3bcc}{a^3}$, et c chances pour avoir à réussir 2 fois en 3 coups, ou pour $\frac{b^3+3bbc}{a^3}$. Il a donc pour sort $\frac{1}{a^4}\left(\begin{matrix} b^4+3b^3c+3b^2c^2 \\ +\ b^3c+3b^2c^2\end{matrix}\right) = \frac{b^4+4b^3c+6b^2c^2}{a^4}$. On trouverait de même, pour la probabilité de réussir 2 fois en 5 coups, $\frac{b^5+5b^4c+10b^3cc+10bbc^3}{a^5}$, et ainsi de suite : de sorte qu'il est évident que la probabilité d'amener le hasard deux fois en n coups a pour dénominateur a^n, et pour numérateur la somme des $n-1$ premiers termes de la puissance n de $b+c$.

Si le joueur parie de réussir 3 fois en 3 coups, son sort est $\frac{b^3}{a^3}$. S'il parie de réussir 3 fois en 4 coups, il a b chances pour avoir à réussir 2 fois en 3 coups ou pour $\frac{b^3+3bbc}{a^3}$, et c chances pour avoir à réussir 3 fois en trois coups ou pour $\frac{b^3}{a^3}$. Son sort est donc $\frac{1}{a^4}\left(\begin{matrix} b^4+3b^3c \\ +\ b^3c\end{matrix}\right) = \frac{b^4+4b^3c}{a^4}$. S'il parie d'amener le hasard 3 fois en 5 coups, il a b cas pour la probabilité $\frac{b^4+4b^3c+6b^2c^2}{a^4}$ et c chances pour la probabilité $\frac{b^4+4b^3c}{a^4}$, et il a pour sort $\frac{1}{a^5}\left(\begin{matrix} b^5+4b^4c+6b^3c^2 \\ +\ b^4c+4b^3cc\end{matrix}\right) = \frac{b^5+5b^4c+10b^3cc}{a^5}$: ce qui suffit pour démontrer que s'il s'agit d'amener le hasard 3 fois en n coups, la probabilité cherchée a pour dénominateur a^n et pour numérateur la somme des $n-2$ premiers termes de la puissance n de $b+c$.

De même la probabilité de réussir 4 fois en n coups a pour dénominateur a^n, et pour numérateur la somme des $n-3$ premiers termes de la même puissance, et ainsi de suite.

On voit donc que le dénominateur de la probabilité cherchée est toujours

a^n, et que le numérateur est composé des n premiers termes de la puissance n de $b+c$, si $m=1$, des $n-1$ premiers, si $m=2$, des $n-2$ premiers, si $m=3$, des $n-3$ premiers, si $m=4\ldots$ et partant des $n-(m-1)=n-m+1$ premiers termes de la même puissance, s'il s'agit d'amener le hasard proposé m fois en n coups.

Donc la probabilité cherchée est $\frac{1}{a^n}\left(b^n+\frac{n}{1}b^{n-1}c+\frac{n.\,n-1}{1.\,2}b^{n-2}c^2\ldots+\frac{n.\,n-1\ldots m+1}{1.\,2\ldots n-m}b^mc^{n-m}\right)$.

Mais comme la double série $\frac{n.\,n-1.\,n-2\ldots m+1}{1.\,2.\,3\ldots n-m}$ ne commence qu'au second terme, elle ne peut servir à l'indication du premier qui se rapporte au cas ou $m=n$, et si l'on veut avoir le numérateur du sort pour tous les cas, il faut donner au dernier terme cette forme $\frac{n.\,n-1\ldots n-m+1}{1.\,2\ldots m}b^m\,c^{n-m}$, qu'on trouve en prenant la puissance par l'autre extrémité, ou en élevant $c+b$ à la puissance n. Car si le dernier terme du numérateur du sort est le $(n-m+1)^{ième}$ terme de la puissance n de $b+c$, il restera $n+1-(n-m+1)=m$ termes de cette puissance, de sorte que le $(n-m+1)^{ième}$ terme de la puissance n de $b+c$ sera le $(m+1)^{ième}$ de la puissance n de $c+b$ et ce terme est $\frac{n.\,n-1\ldots n-m+1}{1.\,2\ldots\ldots m}c^{n-m}\,b^m$.

Les autres termes appartiennent au numérateur de la probabilité *contre* et sont $\frac{n.\,n-1\ldots n-m+2}{1.\,2\ldots m-1}c^{n-m+1}b^{m-1}+\frac{n.\,n-1\ldots n-m+3}{1.\,2\ldots m-2}c^{n-m+2}b^{m-2}\ldots+c^n=$
$=c^n+nc^{n-1}b+\frac{n.\,n-1}{1.\,2}c^{n-2}b^2\ldots+\frac{n.\,n-1\ldots n-m+2}{1.\,2\ldots m-1}c^{n-m+1}b^{m-1}$.

Pour trouver directement cette probabilité, supposons qu'un joueur parie d'avoir m fois en n coups, la face A d'un dé ayant a faces, savoir, b faces A et c faces B. La probabilité *contre* ou le pari contraire est que la face A viendra moins de m fois en n coups, et par conséquent que la face B viendra plus de $n-m$ fois, et partant au moins $m-n+1$ fois : de sorte que la probabilité d'avoir la face B au moins $n-m+1$ fois est le sort de l'antagoniste du joueur.

Que cet antagoniste parie de réussir n fois en n coups, on a vu que son sort est $\frac{c^n}{a^n}$.

S'il parie d'avoir la face B 2 fois en trois coups, il a c chances pour avoir à réus-

sir 1 fois en 2 coups, ou pour $\frac{a^2-b^2}{a^2} = \frac{c^2+2cb}{a^2}$, et b chances pour avoir à réussir 2 fois en 2 coups ou pour $\frac{c^2}{a^2}$; ce qui vaut $\frac{c^3+3ccb}{a^3}$. S'il parie d'avoir B 3 fois en 4 coups, il a c chances pour la probabilité précédente $\frac{c^3+3ccb}{a^3}$, et b chances pour $\frac{c^3}{a^3}$; et il a pour sort $\frac{c^4+4c^3b}{a^4}$. On trouvera de même que, s'il parie de réussir 4 fois en 5 coups, son sort est $\frac{c^5+5c^4b}{a^5}$, et en général que la probabilité de réussir $n-1$ fois en n coups est une fraction qui a pour dénominateur a^n et pour numérateur les deux premiers termes de la puissance n de $c+b$.

En raisonnant toujours de la même manière on verra aisément que le dénominateur de la probabilité d'avoir la face B $n-m+1$ fois en n coups étant toujours a^n, le numérateur sera composé des 3 premiers termes de la puissance n de $c+b$, si $m=3$, des 4 premiers, si $m=4$, des 5 premiers, si $m=5$, et généralement des m premiers, si le premier joueur a entrepris d'avoir la face A au moins m fois en n coups.

Le sort de l'antagoniste du joueur, ou la probabilité *contre*, est donc

$$\frac{1}{a^n}\left(c^n+nc^{n-1}b+\frac{n.n-1}{1.\ 2}c^{n-2}b^2\ldots\ldots+\frac{n.n-1.\ldots.n-m+2}{1.\ 2\ldots\ldots\ldots m-1}c^{n-m+1}b^{m-1}\right),$$

d'où il est facile de déduire la probabilité pour, qui a pour numérateur le reste des termes de la même puissance de $c+b$.

On peut voir ici que le numérateur de cette dernière probabilité est composé de moins de termes que celui de la probabilité pour, dans les cas seulement où $m<\frac{n+1}{2}$, puisque le premier réunit m termes de la puissance n de $c+b$, que le reste appartient à l'autre numérateur, et que le nombre de tous les termes est $n+1$. Dans ces cas il y a plus d'avantage à chercher la probabilité contre; mais leur nombre est égal à celui des cas où $m>\frac{n+1}{2}$. Car m a pour limites 1 et n et ne peut être une fraction. Si n est impair, $\frac{n+1}{2}$ sera un entier.

Alors $m <\frac{n+1}{2} = 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ \ldots\ldots$ ou $\frac{n+1}{2}-1=\frac{n-1}{2}$.

Et $m>\frac{n+1}{2}=\frac{n+3}{2},\ \frac{n+5}{2},\ \frac{n+7}{2}\ ;\ \ldots\ldots$ ou n.

Or ces deux progressions ont précisément le même nombre de termes, savoir, $\frac{n-1}{2}$. Si n est pair $\frac{n+1}{2}$ sera une fraction :

alors $m < \frac{n+1}{2} = 1, 2, 3 \ldots$ ou $\frac{n+1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$;

et $m > \frac{n+1}{2} = \frac{n+2}{2}, \frac{n+4}{2}, \frac{n+6}{2} \ldots\ldots\ldots$ ou n.

Et ces deux progressions ont encore le même nombre de termes; savoir, $\frac{n}{2}$.

2. Examinons maintenant l'autre face du problème, et voyons quel est le sort du joueur qui entreprend d'amener le hasard proposé *précisément* m fois en n coups.

La probabilité de l'amener une fois en un coup est $\frac{b}{a}$. Si le joueur parie de l'amener une seule fois en deux coups, et qu'il réussisse au premier, il faut qu'il manque au second, et il a c cas sur $b+c$ pour manquer, de sorte que la probabilité de manquer est $\frac{c}{a}$. S'il manque au premier il faudra qu'il réussisse au second, et la probabilité de réussir est $\frac{b}{a}$. Ainsi le joueur a b chances pour $\frac{c}{a}$ pour $\frac{b}{a}$. Son sort est donc $\frac{2bc}{aa}$. Si le joueur parie de réussir une seule fois en 3 coups, il a b chances pour réussir au premier et avoir à manquer aux derniers ou pour $\frac{cc}{aa}$, et c chances pour manquer au premier et avoir à réussir une seule fois en deux coups ou pour $\frac{2bc}{aa}$, ce qui vaut $\frac{3bcc}{a^3}$. De même s'il parie de réussir une seule fois en quatre coups, il a pour sort $\frac{4bc^3}{a^4}$, et il est facile de voir que s'il entreprend de réussir une seule fois en n coups, son sort est $\frac{nc^{n-1}b}{a^n}$; fraction dont le numérateur est le second terme de la puissance n de $c+b$.

La probabilité de réussir 2 fois en deux coups est $\frac{bb}{aa}$. De cette probabilité et de celle de réussir une fois en 2 coups qui est $\frac{2bc}{aa}$, se déduit celle de réussir deux fois en 3 coups; car si le joueur réussit au premier, il a

$\frac{2bc}{aa}$, et s'il manque il a $\frac{lb}{aa}$, ce qui vaut $\frac{1}{a}$. $\frac{2bbc+cbb}{aa} = \frac{3cb^2}{a^3}$. Multipliez par c cette dernière probabilité, et par b celle de réussir une fois en trois coups qui est $\frac{3bcc}{a^3}$, vous aurez le numérateur $6c^2b^2$ de la probabilité de réussir deux fois en 4 coups, dont le dénominateur est a^4; et en continuant ainsi vous trouverez que le dénominateur de la probabilité de réussir deux fois seulement en n coups étant a^n, le numérateur est $\frac{n.(n-1)}{1 \quad 2} c \quad b^2$, ou le troisième terme de la puissance n de $c+b$.

Il n'est pas plus difficile de trouver que le dénominateur de la probabilité d'amener le hasard proposé m fois seulement en n coups étant toujours a^n, le numérateur est le 4e. terme de la puissance n de $c+b$ si $m=3$, le 5e., si $m=4$, le 6e. si $m=5$, et le $(m+1)^{\text{ième}}$ si m conserve sa valeur générale.

Or le $(m+1)^{\text{ième}}$ terme de la puisance n de $c+b$ est $\frac{n.n-1\ldots n-m+1}{1.2\ldots m} c^{n-m}b^m$,

Le sort du joueur est donc $\frac{n.n-1\ldots n-m+1}{1.2\ldots m.a^n} c^{n-m}b^m = \frac{n.n-1\ldots m+1}{1.2\ldots n-m.a^n} b^m c^{n-m}$.

Cette probabilité est, comme on le voit, le dernier terme de celle de réussir au moins m fois en n épreuves; et il est facile de s'en convaincre indépendamment du calcul précédent, puisque la probabilité de réussir m fois, ni plus ni moins, est égale à celle de réussir m fois ou plus, moins celle de réussir $m+1$ fois ou plus; et que la première comprend tous les termes de la puissance n de $b+c$ jusqu'à $\frac{n.n-1\ldots m+1}{1.2\ldots n-m} b^m c^{n-m}$ inclusivement, et la seconde tous les termes précédens.

Réciproquement la probabilité de réussir m fois précisément peut servir à faire connaître celle de réussir m fois ou plus. Car si dans la formule on substitue $m+1$, $m+2$, $m+3$, ... n à m, et qu'on ajoute ensemble toutes ces valeurs, on aura la probabilité de réussir soit $m+1$ fois, soit $m+2$ fois, soit $m+3$ fois... soit n fois; si l'on y ajoute encore la probabilité de réussir m fois, on aura celle de réussir m fois ou plus: et la somme de toutes ces valeurs se trouvera être $\frac{1}{a^n}\left(b^n+nbc^{n-1}+\frac{n.n-1}{1.2}b^2c^{n-2}\ldots + \frac{n.n-1\ldots m+1}{1.2\ldots n-m} b^m c^{n-m}\right)$.

3. La solution de ce double problème est démontrée aux yeux dans la série que nous avons donnée au § XV, savoir, $b^n A^n + nb^{n-1} c A^{n-1} B + \frac{n.n-1}{1.2} b^{n-2} c^2 A^{n-2} B^2 \ldots + \frac{n.n-1}{1.2} c^{n-2} b^2 B^{n-2} A^2 + nc^{n-1} b B^{n-1} A + c^n B^n$, où $b+c=a$ exprime le nombre des faces d'un dé qu'on suppose toutes marquées A ou B, b le nombre des faces A, c celui des faces B, n le nombre des jets de ce dé, et où les coëfficiens b^n, $nb^{n-1}c$, $\frac{n.n-1}{1.2} b^{n-2}c^2$, etc., expriment respectivement les nombres de chances qu'il y a pour A^n, pour A^{n-1}, pour A^{n-2}, etc., c'est-à-dire, pour avoir A à tous les jets, à tous les n jets moins 1, à tous les n jets moins 2, etc., à deux, à un seul, à aucun.

La probabilité cherchée est, dis-je, formellement et explicitement écrite dans cette série, de même que la probabilité contraire, soit qu'il s'agisse d'amener le hasard ou la face A le nombre de fois proposé, ou plus fréquemment, ou ce nombre de fois et pas davantage.

Supposons qu'il s'agisse d'amener la face A précisément m fois. On cherchera le terme où l'exposant de A est m. Soit $m=n-x$. Il est clair que ce terme est

$$\frac{n.n-1 \ldots n-(x-1)}{1.2 \ldots x} b^{n-x} c_x A^{n-x} B^x,$$ ou, en substituant à x sa valeur $n-m$,

$$\frac{n.n-1 \ldots m+1}{1.2 \ldots n-m} A_m B^{n-m},$$ ce qui désigne qu'il y a $\frac{n.n-1 \ldots m+1}{1.2 \ldots n-m}$ chances pour avoir la face A précisément m fois, ou à m jets et pas davantage. Si l'on divise ce nombre par la totalité des chances, on aura la probabilité de réussir. La somme des coëfficiens des autres termes appartient à la probabilité contre.

Maintenant, comme dans tous les termes qui précèdent, celui où se trouve A^m, l'exposant de A est plus grand que m, il est clair que le nombre des chances pour amener la face A au moins m fois, ou à m jets ou plus, est égal à la somme des coëfficiens de ce terme et de tous les termes précédens, et que le nombre des chances contraires est égal à la somme de tous les termes suivans. Le nombre des chances pour réussir est donc

$$b^n + nb^{n-1}c + \frac{n.n-1}{1.2} b^{n-2}c^2 \ldots + \frac{n.n-1 \ldots m+1}{1.2 \ldots n-m} b^m c_{n-m},$$ et le nombre

des chances pour manquer est $\frac{n.n-1 \ldots m}{1.2 \ldots n-m+1} b^{m-1} c^{n-m+1} + \frac{n.n-1 \ldots m-1}{1.2 \ldots n-m+2} b^{m-2} c^{n-m+2} \ldots + nc^{n-1}b + c^n$. Si donc on divise chacune de ces quantités par a_n, nombre de toutes les chances pour les n jets, on aura la probabilité

pour et la probabilité contre. On peut trouver celle-ci directement dans la série $c^nB^n + nc^{n-1}bB^{n-1}A + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2}c^{n-2}b^2B^{n-2}A^2 \ldots\ldots + b^nA^n$, qui est la même que la précédente. Car la somme des coëfficiens du terme où A a l'exposant $m-1$ et des précédens, où il a un exposant moindre, désigne le nombre des chances qu'il y a pour amener moins de m fois la face A, ou pour l'amener à moins de m jets. Le terme dont il s'agit sera, comme il est facile de le voir, $\frac{n \cdot n-1 \ldots n-m+2}{1 \cdot 2 \ldots\ldots m-1} c^{n-m+1}b^{m-1}B^{n-m+1}A^{m-1}$. Ainsi le nombre des chances pour amener moins de m fois la face A est $c^n + nc^{n-1}b + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2}c^{n-2}b^2 \ldots\ldots + \frac{n \cdot n-1 \ldots n-m+2}{1 \cdot 2 \ldots\ldots m-1} c^{n-m+1}b^{m-1}$, quantité qui, divisée par a^n, donne la probabilité cherchée.

REMARQUE.

Bernoulli qui a considéré le problème sous les deux rapports qu'on vient de voir, ne l'a point résolu sous le second par la méthode de Huyghens, c'est-à-dire, qu'il n'a point appliqué cette méthode au problème qui consiste à trouver la probabilité de réussir m fois *précisément* en n jets. Mais il donne une règle pour calculer la probabilité d'amener un hasard à certains jets, dans un ordre déterminé, et non aux autres, en supposant que les chances varient perpétuellement de jet en jet. Nous reviendrons sur cette règle dont il tire la formule qui exprime la probabilité de réussir à quelques jets déterminés, à l'exclusion du reste des jets. A cette formule il applique la théorie des combinaisons pour en conclure la probabilité de réussir précisément m fois en n coups, ou à m jets pris dans un ordre quelconque ou indéterminé, exclusivement aux autres. Mais comme il n'explique la doctrine des combinaisons que dans la seconde partie de son ouvrage, nous avons cru devoir résoudre le problème par d'autres méthodes qui vont encore nous servir pour celui dont il l'a fait dépendre.

§. XVIII.

Quelle est la probabilité d'amener un hasard à plusieurs de n épreuves, dans un ordre déterminé, exclusivement aux autres, les chances étant en nombres constans ?

Soient comme ci-dessus, un dé ayant b faces A, et c faces B, en tout

$b+c=a$; m le nombre des jets où il faut amener la face A, et partant $n-m$ le nombre de ceux où il faut amener la face B.

Observons que la probabilité du succès est la même, quel que soit l'ordre des m jets qui doivent donner la face A, puisqu'il n'est ni plus ni moins facile de l'avoir au premier qu'au second jet, ni au premier et au second, qu'au premier et au troisième, ou au second et au troisième, etc etc. Il nous suffira donc de trouver la probabilité d'avoir A à tous les m premiers jets, et B à tous les $n-m$ derniers.

On se rappelle que $\frac{b^n}{a^n}$ est la probabilité d'avoir n fois A, et $\frac{c^n}{a^n}$ celle d'avoir n fois B en n jets.

Cela posé, la probabilité d'avoir A au premier jet, et B aux $n-1$ derniers, est facile à trouver; car le joueur a c chances pour avoir B au premier, ou pour perdre, et b chances pour avoir à amener B à chacun des autres, c'est-à-dire $n-1$ fois en $n-1$ jets, ou pour passer aux $n-1$ derniers jets, qui valent $\frac{c^{n-1}}{a^{n-1}}$. Son sort est donc $\frac{bc^{n-1}}{a^n}$.

La probabilité d'avoir B à chacun des $n-2$ derniers et A au précédent, est donc $\frac{bc^{n-2}}{a^{n-1}}$, d'où se déduit celle d'avoir A aux deux premiers et B à tous les autres, puisqu'il y a c chances pour o et b pour $\frac{bc^{n-2}}{a^{n-1}}$; ce qui vaut $\frac{b^2c^{n-2}}{a^n}$.

Donc la probabilité d'avoir B aux $n-3$ derniers et A aux deux précédens est $\frac{b^2c^{n-3}}{a^{n-1}}$. Et partant celle d'avoir A aux trois premiers et B à tous les autres est $\frac{b^3c^{n-3}}{a^n}$.

Et sans aller plus loin, il est facile de voir que la probabilité d'amener la face A aux m premiers et la face B aux $n-m$ derniers est $\frac{b^m c^{n-m}}{a^n}$.

C'est ce qu'on peut démontrer beaucoup plus simplement. Car $\frac{b^m}{a^m}$ étant la probabilité d'amener A à chacun des m premiers jets, le joueur a b^m chances sur a^m pour passer aux $n-m$ derniers, qui valent $\frac{c^{n-m}}{a^{n-m}}$; c'est-à-dire, qu'il a

$a^m - b^m$

$a^m - b^m$ chances pour o, et b^m pour $\frac{c^{n-m}}{a^{n-m}}$. Donc il a pour sort $\frac{b^m c^{n-m}}{a^m a^{n-m}}$ $= \frac{b^m c^{n-m}}{a^n}$.

2. Cette formule est encore très-facile à reconnaître dans la série $b^n A^m + n b^{n-1} c A^{n-1} B + \frac{n.n-1}{1.2} b^{n-2} c^2 A^{n-2} B^2$, etc., où nous avons lu la solution du problème précédent. Car, dans le terme qui indique combien il y a de manières d'avoir précisément m fois la face A en n jets, l'exposant de A est m, celui de B est $n-m$, et le coëfficient de ce terme est $\frac{n.n-1 \ldots m+1}{1.2 \ldots n-m}$ b^m c^{n-m}, dont la partie fractionnaire désigne, comme on sait, les divers arrangemens de $b^m c^{n-m}$, et partant de $A^m B^{n-m}$. Mais si tous les A doivent venir avant tous les B, c'est-à-dire, si la face A doit venir m fois avant qu'on ait une seule fois la face B, ces différens arrangemens se réduiront évidemment à un. Donc il y a précisément $b^m c^{n-m}$ manières d'avoir la face A aux m premiers jets, et la face B aux $n-m$ derniers, et par conséquent $b^m c^{n-m}$ chances sur $(b+c) = a^n$ pour réussir; d'où il suit que la probabilité cherchée est $\frac{b^m c^{n-m}}{a^n}$.

§. XIX.

Où l'on démontre, par la méthode de Huyghens, la règle de Bernoulli pour trouver la probabilité d'amener un hasard proposé en plusieurs de n épreuves, dans un ordre déterminé, les chances étant en nombres variables.

Supposons n dés, n'ayant que des faces A et des faces B, les nombres des faces A et des faces B étant respectivement, pour le premier b et c, pour le second e et f, pour le troisième, h et i, pour le quatrième q et r, pour le cinquième t et u; que les dés soient jetés dans cet ordre, et soient $b+c=a$, $e+f=d$, $h+i=g$, $q+r=p$, $t+u=s$, et v, x, y, z, ω, les sorts du joueur, au premier, au second, au troisième, au quatrième, au cinquième jet; comme on le voit au tableau suivant.

Ordre des jets.	1	2	3	4	5
Nombres des chances pour amener A. . . .	b	e	h	q	t
Nombres de chances pour amener B. . . .	c	f	i	r	u
Sommes des chances.	a	d	g	p	s
Sorts du joueur.	v	x	y	z	ω

Si le joueur parie, par exemple, d'amener la face A à chacun des trois premiers jets, et la face B au quatrième et au cinquième, il est clair qu'au premier il aura b chances sur a pour passer au second et c chances pour o; et qu'ainsi $v = \frac{b}{a} x$. On trouvera de même $x = \frac{e}{d} y$, $y = \frac{h}{g} z$, $z = \frac{r}{p} \omega$. Mais lorsque le joueur passe au dernier jet, il a u chances pour amener B et gagner le dépôt $= 1$, et t chances pour o, ce qui vaut $\frac{u.1 + t.o}{s}$. On a donc $\omega = \frac{u}{s}$, $z = \frac{r}{p}.\frac{u}{s}$, $y = \frac{h}{g}.\frac{r}{p}.\frac{u}{s}$, $x = \frac{e}{d}.\frac{h}{g}.\frac{r}{p}.\frac{u}{s}$, $v = \frac{b}{a}.\frac{e}{d}.\frac{h}{g}.\frac{r}{p}.\frac{u}{s}.$ $= \frac{behru}{adgps}$: où l'on voit que $\frac{b}{a}$ est la probabilité de réussir avec le premier dé, ou au premier jet, $\frac{e}{d}$ celle de réussir avec le second dé ou au second jet etc.; et qu'ainsi le sort du joueur est égal au produit des probabilités de réussir aux divers jets pris séparément, et partant au produit des chances qui doivent donner A ou le hasard proposé par celui des chances qui doivent donner B ou un hasard différent, divisé par le produit de toutes les chances.

Il est visible que cette règle est générale; car s'il fallait, par exemple amener A au premier, au troisième et au cinquième jet, et B au second et au quatrième, il suffirait pour avoir le sort du joueur de substituer t à u, f à e et q à r dans la valeur de v, ce qui donnerait $v = \frac{b}{a}.\frac{f}{d}.\frac{h}{g}.\frac{q}{p}.\frac{u}{s}. = \frac{bfhqu}{adgps}$.

Si donc il s'agit d'amener A au premier et au second jet et B au troisième, la probabilité de réussir au premier, au second, au troisième jet, pris séparément étant $\frac{b}{a}$, $\frac{e}{d}$, $\frac{i}{g}$, le sort est $\frac{b}{a}.\frac{e}{d}.\frac{i}{g} = \frac{bei}{adg}$, suivant la règle. Et en effet on a alors $y = \frac{i}{g}$, et partant $x = \frac{e}{d} y = \frac{e}{d}.\frac{i}{g}$ et $v = \frac{b}{a} x = \frac{b}{a}.\frac{e}{d}.\frac{i}{g}$ $= \frac{bei}{adg}$.

Et s'il faut amener A au premier, B au second, A au troisième, B au quatrième jet, le sort que détermine la règle est $\frac{bfhr}{adgp}$. En effet, on a dans ce cas $v = \frac{b}{a} x$, $x = \frac{f}{d} y$, $y = \frac{h}{g} z$ et $z = \frac{r}{p}$, et par conséquent $y = \frac{h}{g}.\frac{r}{p}$, $x = \frac{f}{d}.\frac{h}{g}.\frac{r}{p}$ et $v = \frac{b}{a}.\frac{f}{d}.\frac{h}{g}.\frac{r}{p} = \frac{bfhr}{adgp}$.

Le sort du joueur qui parie de réussir à tous les jets, soit en amenant *A*, soit en amenant *B*, suivant la loi du jeu, est donc exprimé par le rapport du produit des chances qui le font réussir aux divers jets pris séparément, au produit des diverses sommes des chances.

§. XX.

Sur la proposition XIII.

La question, généralement prise, se réduit à celle-ci :

Un joueur a b *chances pour avoir le dépôt* 1, u *pour en avoir la moitié, et* c *pour ne rien avoir : quel est son sort ?*

Soit $a = b + c + u$, la somme des chances.

Il est clair que les b chances dont chacune donne au joueur l'argent du jeu, lui valent $\frac{b}{a}$, et que chacune des u chances lui en donnant la moitié, elles lui donnent ensemble $\frac{u}{2a}$. Son attente est donc $\frac{b}{a} + \frac{u}{2a} = \frac{2b+u}{2a}$; ce qui donne cette règle :

Ajoutez au double du nombre des chances favorables le nombre des chances communes, et divisez la somme par le double de la totalité des chances : le quotient sera le sort du joueur.

Si l'on en soustrait la mise du joueur, le reste sera son gain ou sa perte, qui est par conséquent $\frac{2b+u}{2a} - \frac{1}{2} = \frac{2b+u-a}{2a} = \frac{2b+u-b-c-u}{2a} = \frac{b-c}{2a}$: d'où l'on tire cette autre règle :

Retranchez le nombre des chances favorables de celui des chances contraires ; divisez la différence par le double de la somme des chances : le quotient sera le profit ou la perte du joueur ; le profit, si la différence est positive, la perte si elle est négative.

§. XXI.

Sur la proposition XIV.

1. *Solution du problème en général par la méthode de Huyghens.*
2. *Autres manières de le résoudre.*

Le problème général peut s'énoncer ainsi :

A *et* B *jouent alternativement pour amener, savoir,* A *un hasard pour lequel il y a* e *chances sur* e+f, *et* B *un autre hasard pour lequel il y en a* b *sur* b+c, *de sorte que* e+f=b+c=a; *et* B *joue le premier : quels sont les sorts respectifs ?*

Voici comment on peut le résoudre par la méthode de Huyghens.

Puisque B jouant a b chances pour gagner et c pour que le jeu continue ; il est clair que A, au commencement du jeu et toutes les fois que B joue, a b chances pour perdre et c pour jouer à son tour. Si donc on appelle y son attente, lorsque ce tour vient, son attente, au commencement du jeu, est $\frac{b.\,0+c.y}{a}=\frac{cy}{a}$. Mais A jouant a e chances pour gagner et f pour que le tour de B revienne, c'est-à-dire pour recouvrer le sort que lui offrait le commencement du jeu, ou pour $\frac{cy}{a}$, ce qui lui vaut $\frac{e.\,1+f.\frac{cy}{a}}{a}=y=\frac{ae}{aa-cf}$, qui, multiplié par $\frac{c}{a}$ donne $\frac{ce}{aa-cf}$, pour le sort de A. Celui de B est donc $1-\frac{ce}{aa-cf}=\frac{aa-cf-ce}{aa-cf}=\frac{ab}{aa-cf}$, à cause de $f=a-e$ et de $b=a-c$.

Pour trouver directement le sort de B soit z son attente lorsque A joue. B jouant a b chances pour gagner et c pour que A joue à son tour, ce qui vaut $\frac{b+cz}{a}$. Mais A jouant, B a e chances pour perdre et f pour reprendre son tour et son premier jeu, ce qui vaut $\frac{bf+cfz}{aa}=z=\frac{bf}{aa-cf}$.

Le sort de B est donc $\frac{1}{a}\left(b+\frac{bcf}{aa-cf}\right)=\frac{ab}{aa-cf}$.

Bernoulli observe qu'ici l'auteur a recours, pour la première fois, à l'a-

nalyse, sans laquelle il n'aurait pu, dit-il, déterminer par sa méthode les sorts respectifs, parce qu'on ne peut évaluer le sort du joueur qui tient les dés qu'on ne connaisse celui de son adversaire jouant à son tour, et réciproquement; et il donne une méthode, qui lui est propre, pour résoudre le problème indépendamment de toute équation algébrique.

2. Cette méthode consiste 1°. à supposer une infinité de joueurs, à chacun desquels il soit accordé un seul jet, de manière que les joueurs en ordre pair ayent e chances favorables sur $e+f$, et les joueurs en ordre impair b chances favorables sur $b+c$; 2°. à attribuer à A les sorts de tous les joueurs en ordre pair, et à B ceux de tous les joueurs en ordre impair. La difficulté se réduit à déterminer séparément ces divers sorts que le célèbre annotateur déduit aisément de la règle qu'il a donnée vers la fin de ses remarques sur la proposition XII.

On peut encore évaluer ces sorts, ou trouver les valeurs des jets successifs par la proposition III, en faisant varier le dépôt, c'est-à-dire, en considérant, à chaque jet, l'argent du jeu comme diminué de la valeur des jets précédens, ainsi que nous l'avons expliqué au §.... Voici la méthode.

Le premier jet vaut $\frac{b}{a}$. Le dépôt étant 1, il reste $1-\frac{b}{a}=\frac{c}{a}$. Il y a donc au deuxième jet e chances pour $\frac{c}{a}$ et f chances pour o, ce qui vaut $\frac{ce}{aa}$. Il reste $\frac{c}{a}-\frac{ce}{aa}=\frac{c.(a-e)}{aa}=\frac{cf}{aa}$.

Il est facile de voir que, pour avoir la valeur d'un jet il suffit de multiplier le reste des précédens par le rapport des chances *pour* à la totalité des chances, c'est-à-dire, par $\frac{b}{a}$, si le jet est impair, et par $\frac{e}{a}$ si le jet est pair.

Ainsi la valeur du troisième jet est $\frac{b}{a}\cdot\frac{cf}{aa}=\frac{bcf}{a^3}$. Il reste $\frac{cf}{aa}-\frac{bcf}{a^3}=\frac{(a-b).cf}{a^3}=\frac{ccf}{a^3}$. Donc le quatrième jet vaut $\frac{e}{a}\cdot\frac{ccf}{a^3}=\frac{eccf}{a^4}$. Il reste $\frac{ccf}{a^3}-\frac{eccf}{a^4}=\frac{(a-e).ccf}{a^4}=\frac{ccff}{a^4}$. Donc le cinquième jet vaut $\frac{b}{a}\cdot\frac{ccff}{a^4}=\frac{bccff}{a^5}$, etc.

On peut remarquer que, $2n$ étant un nombre pair quelconque, la valeur du $2n$.ième jet est $\frac{ec^n f^{n-1}}{a^{2n}}$, et celle du jet impair précédent est $\frac{b(cf)^{n-1}}{a^{2n-1}}$.

Si donc on fait successivement $n=1, 2, 3, 4, 5, 6$, etc., et qu'on substitue ces nombres l'un après l'autre dans la seconde formule, on aura les valeurs des jets impairs, comme il suit :

Jets impairs.	1er	3e	5e	7e	9e	11e	13e	. . . .	$2n-1$e.
Sorts. . . .	$\frac{b}{a}$	$\frac{bcf}{a^3}$	$\frac{bccff}{a^5}$	$\frac{bc^3f^3}{a^7}$	$\frac{bc^4f^4}{a^9}$	$\frac{bc^5f^5}{a^{11}}$	$\frac{bc^6f^6}{a^{13}}$	. . . .	$\frac{b(fc)^{n-1}}{a^{2n-1}}$.

Les valeurs successives de n substituées de même dans la première formule donneront pour les jets pairs celles qui suivent.

Jets pairs.	2e	4e	6e	8e	10e	12e	. . . .	$2n$e.
Sorts. . .	$\frac{ce}{aa}$	$\frac{eccf}{a^4}$	$\frac{ec^3ff}{a^6}$	$\frac{ec^4f^3}{a^8}$	$\frac{ec^5f^4}{a^{10}}$	$\frac{ec^6f^5}{a^{12}}$	. . . .	$\frac{ec^nf^{n-1}}{a^{2n}}$.

Or il est visible que le sort B est égal à la somme des valeurs des jets impairs, comme le sort de A l'est à celle des valuers des jets pairs. Il reste donc à sommer ces séries qui forment deux progressions géométriques, ayant chacune pour quotient $\frac{cf}{aa}$.

Comme a est plus grand que chacun des nombres c, e, b, f et que le nombre des dimensions du numérateur est par-tout égal au nombre de celles du dénominateur, le dernier terme de chacune des deux séries est égal à zéro, le nombre des termes étant infini.

La somme de la première est donc $\dfrac{-b\,\frac{1}{a}}{(cf-aa)\,\frac{1}{aa}} = \dfrac{ab}{aa-cf}$, sort de B.

Et celle de la seconde $\dfrac{-ce\,\frac{1}{aa}}{(cf-aa)\,\frac{1}{aa}} = \dfrac{ce}{aa-cf}$; sort de A.

On peut, sans faire varier le dépôt, sans aucune équation algébrique et en suivant exactement la marche de Huyghens, trouver la valeur de chaque jet, et par conséquent la loi des deux séries précédentes ; et voici comment.

Chaque jet impair séparément et abstraction faite des jets précédens vaut $\frac{b}{a}$, et chaque jet pair $\frac{e}{a}$.

La valeur du premier jet étant $\frac{b}{a}$, il y a $a-b=c$ chances pour que le second jet ait lieu. Donc il y a c chances sur a pour avoir au second jet $\frac{e}{a}$. Donc le deuxième jet, au commencement du jeu, vaut $\frac{c}{a} \cdot \frac{e}{a} = \frac{ce}{aa}$.

Les deux premiers jets valent donc $\frac{b}{a} + \frac{ce}{aa} = \frac{ab+ce}{aa}$. Donc il y a $aa-ab-ce$ chances sur aa pour avoir au troisième jet $\frac{b}{a}$. Or $aa-ab-ce=a(a-b)-ce=ac-ce=c(a-e)=cf$. Le troisième jet vaut donc au commencement $\frac{cf}{aa} \cdot \frac{b}{a} = \frac{bcf}{a^3}$.

Ainsi, les trois premiers valent ensemble $\frac{ab+ce}{aa} + \frac{bcf}{a^3} = \frac{aab+ace+bcf}{a^3}$. Il y a donc $a^3-aab-ace-bcf$, ou $aa(a-b)-ace-bcf$, ou $aac-ace-bcf$, ou $ac(a-e)-bcf$, ou $acf-bcf$, ou $(a-b)cf$, ou enfin ccf chances sur a^3 pour avoir au quatrième jet $\frac{e}{a}$. Donc le quatrième jet vaut $\frac{ccf}{a^3} \cdot \frac{e}{a} = \frac{eccf}{a^4}$.

Les quatre premiers jets valent donc $\frac{aab+ace+bcf}{a^3} - \frac{eccf}{a^4} = \frac{a^3b+aace+abcf-eccf}{a^4}$. Donc il y a $a^4-a^3b-aace-abcf-eccf=a^3c-aace$ etc. $=aacf-abcf$, etc. $=accf-eccf=ccff$ chances sur a^4 pour avoir $\frac{b}{a}$ au 5e. jet, qui, par conséquent, vaut $\frac{ccff}{a^4} \cdot \frac{b}{a} = \frac{bccff}{a^5}$ et ainsi de suite.

§. XXII.

Sur le premier problème de l'appendice.

1. *Moyen facile de le résoudre.*

2. *Méthode simple pour trouver les sorts en nombre finis lorsque les derniers jets sont en nombre alternativement égaux, les nombres des jets de l'un des joueurs étant égaux ou inégaux à ceux de l'autre, et quelle que soit l'irrégularité des nombres des premiers jets.*

3. *Eclaircissemen de la règle de Bernoulli.*

Pour résoudre le problème en nombres tels que l'a proposé l'auteur, Bernoulli emploie 4 inconnues et autant d'équations qu'il réduit ensuite à 3. Mais on peut parvenir au même but avec une seule équation.

La question peut se poser de la manière suivante :

A *et* B *jouent alternativement, d'abord* A *une fois, ensuite* B *et* A *toujours chacun deux fois jusqu'à ce que l'un des deux gagne le pari, les chances pour et contre* A *étant égales aux nombres* b *et* c, *et celles pour et contre* B *aux nombres* e *et* f, *de sorte que* $b+c=e+f=a$.

1. Soit x le sort de A.

L'ordre numérique des jets étant 1 2 3 4 5 6 7, etc.

Celui des joueurs est. . . . . A B B A A B B, etc.

Lorsque A joue pour la seconde fois, ou lorsqu'il fait le 4e. jet, il a b chances pour avoir le dépôt$=1$, et c chances pour jouer encore une fois, et par conséquent pour son premier jeu, ou pour x, puisque le 5e. jet étant ouvert, A jouera une fois, B deux fois, A deux fois, et ainsi de suite comme au commencement. L'attente de A, faisant le 4e. jet, est donc $\frac{b.1+c.x}{b+c}$ $=\frac{b+cx}{a}$.

Mais B jouant pour la seconde fois, ou faisant le 3e. jet, a e chances pour gagner ou pour 1, et il en reste f pour que A reprenant son tour ait $\frac{b+cx}{a}$. C'est-à-dire qu'alors A a e chances pour perdre ou pour o et f pour $\frac{b+cx}{a}$, ce qui lui vaut $\frac{fb+fcx}{a}$.

Et

Et quand B joue pour la première fois, et fait le second jet, A a de même c chances pour o, et f pour l'attente précédente, $\frac{fb+fcx}{aa}$, ce qui vaut $\frac{ffb+ffcx}{a^3}$.

Enfin, A commençant le jeu, a b chances pour 1, et c pour $\frac{ffb+ffcx}{a^3}$, et son attente est $\frac{a^3b+bcff+ccffx}{a^4}$; et comme nous avons appelé x ce sort même, nous avons $x=\frac{a^3b+bcff+ccffx}{a^4}$: d'où se tire $x=\frac{a^3b+bcff}{a^4-ccff}$.

Le sort de B est donc $1-\frac{a^3b+bcff}{a^4-ccff}=\frac{a^4-ccff+\overline{c-a}(a^3+cff)}{a^4-ccff}=\frac{a^3c-acff}{a^4-ccff}$
$=\frac{ac(a+f)(a-f)}{a^4-ccff}=\frac{aacc+acef}{a^4-ccff}$.

Mais cette marche serait souvent fort longue, et les nombres des jets convenus pour chaque tour pourraient être tellement grands, qu'il fût impossible de la suivre, puisqu'il faudrait employer deux fois autant d'équations, ou au moins d'opérations qu'il y aurait de jets pour un tour, le premier excepté. Il faut donc trouver un moyen plus expéditif.

2. Pour rendre la solution plus générale, supposons que B et A jouant toujours alternativement, et B le premier, il ait été accordé m jets consécutifs à B, et n à A: et soit x le sort de A.

Il a été amplement démontré au §. XIV que A devant jouer n fois de suite, a a^n-c^n chances pour réussir, et c^n pour manquer. Ainsi, lorsque son tour vient, il a a^n-c^n cas pour avoir le dépôt 1, et il reste c^n cas dans chacun desquels B, reprenant son tour, A se retrouve au même état qu'au commencement du jeu, où son sort est x. Donc, son attente, quand son tour arrive, est $\frac{(a^n-c^n).1+c^n x}{a^n}$.

Lorsque B commence, et toutes les fois qu'il reprend son tour, il a, par la même raison, a^m-f^m cas pour gagner, et il reste f^m cas, dans chacun desquels A jouant à son tour, a le sort précédent $\frac{a^n-c^n+c^nx}{a^n}$: c'est-à dire, qu'au commencement, A a a^m-f^m chances pour o, et f^m pour $\frac{a^n-c^n+c^nx}{a_n}$.

Ainsi, le sort de A ou $x = \frac{(a^n - c^n) f^m + c^n f^m x}{a^{m+n}}$: d'où l'on tire $x =$ $\frac{(a^n - c^n) f^m}{a^{m+n} - c^n f^m} = F$.

Soit y le sort de B. On a $y = 1 - \frac{(a^n - c^n) f^m}{a^{m+n} - c^n f^m} = \frac{(a^m - f^m) a^n}{a^{m+n} - c^n f^m}$.

En effet, le tour de A venant, B a $a^n - c^n$ chances pour o et c^n pour reprendre son tour, ce qui vaut $\frac{c^n y}{a^n}$. Mais au commencement B a $a^m - f^m$ chances pour 1 et f^m pour l'attente précédente. Son sort est donc $\frac{a^n (a^m - f^m) + f^m c^n y}{a^{m+n}} = y$. D'où l'on tire $y = \frac{(a^m - f^m) a^n}{a^{m+n} - c^n f^m}$

Ainsi lorsque les nombres des jets consécutifs de B et de A reviennent alternativement les mêmes, les sorts respectifs se déterminent aisément par ces deux formules.

Soit donc F le sort de A dans cette hypothèse.

Si avant que B commence à jouer A doit faire h jets, ce dernier a $a^h - c^h$ chances pour 1 et c^h pour F. Alors il a pour sort $\frac{a^h - c^h + c^h F}{a^h}$.

Tel est le sort de A lorsqu'il doit faire d'abord un nombre h de jets, et qu'ensuite les nombres des jets de B et de A doivent être alternativement m et n, ou lorsque les tours étant ordinalement 1 2 3 4 5, etc., et A jouant le premier, les nombres des jets sont h m n m n, etc.

Si dans cette expression du sort de A on substitue la valeur de F, il devient $\frac{(a^h - c^h)(a^{m+n} - c^n f^m) + (a^n - c^n) c^h f^m}{a^h (a^{m+n} - c^n f^m)} = \frac{(a^h - c^h) a^{m+n-h} + (a^{n-h} - c^{n-h}) c^h f^m}{a^{m+n} - c^n f^m}$.

Si l'on fait $h = 1$ et $m = n$, la formule est $\frac{a^{2n-1} b + (a^{n-1} - c^{n-1}) c f^n}{a^{2n} - c^n f^n}$.

Et si l'on fait de plus $n = 2$ on a l'espèce du problème que nous venons de résoudre, et l'on trouve pour le sort de A $\frac{a^3 b + bcff}{a^4 - ccff}$, comme ci-dessus.

Que si l'on suppose qu'avant que les nombres des jets commencent à devenir récurrens A et B doivent faire alternativement divers jets en nombres égaux, ou inégaux, mais différens des suivans: par exemple, que

L'ordre dans lequel ils jouent étant	A B A B A B A B A, etc.
Et l'ordre des tours.	1 2 3 4 5 6 7 8 9, etc.
Les nombre des jets soient. . . .	1 1 2 m n m n m n, etc.

On trouvera encore facilement le sort de A.

Car A faisant le premier jet du 3e. tour a $aa-cc$ chances pour 1 et cc pour F, ce qui lui vaut $\frac{aa-cc+ccF}{aa}$.

Lorsque B joue au 2e. tour et qu'il fait le second jet, A a $a-f$ chances pour o et f pour l'attente précédente, ou pour $\frac{aa-cc+ccF}{aa}$ ce qui vaut $\frac{f}{a^3}$ $(aa-cc+ccF)$.

Enfin, A commençant à jouer; a b chances pour 1; et c pour $\frac{f}{a^3}$ $(aa-cc+ccF)$.

Son sort est donc $\frac{a^3b+cf(aa-cc+ccF)}{a^4}$.

Si l'on retranche de l'unité le sort de A dans chacune de ces hypothèses, on aura le sort de B qu'il n'est pas plus difficile de trouver directement.

Mais quand les nombres alternatifs des jets se succèdent irrégulièrement, il faut en revenir à évaluer séparément les jets divers, pour attribuer à chacun des joueurs toutes les valeurs qui se trouvent lui échoir suivant les conditions du problême. Alors on ne peut plus avoir les sorts en nombres finis, mais on peut en approcher d'aussi près qu'on le juge à propos : Bernoulli a donné pour cela une règle générale, que nous démontrerons de la manière suivante, en conservant à a et à c leurs valeurs précédentes.

On a vu que la valeur d'un nombre n de jets est $\frac{a^n-c^n}{a^n}$, et partant que celle des $n-1$ jets précédens est $\frac{a^{n-1}-c^{n-1}}{a^{n-1}}$ Donc celle du n^e. jet est $\frac{a^n-c^n}{a^n}$ $-\frac{a^{n-1}-c^{n-1}}{a^{n-1}}=\frac{a^n-c^n-a^n+ac^{n-1}}{a^n}=\frac{ac^{n-1}-c^n}{a^n}=\frac{(a-c).c^{n-1}}{a^n}$.

Soit $c=am$, la valeur du n^e, jet [sera $\frac{(a-am).a^{n-1}m^{n-1}}{a^n}=(1-m).m^{n-1}=$ $m^{n-1}-m^n$.

Si donc on fait n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc.

Les valeurs des jets seront $1-m$, $m-m^2$, m^2-m^3, m^3-m^4, m^4-m^5, m^5-m^6, etc.

La valeur du ($n-1$^e.) et du n^e. sera $m^{n-2}-m^{n-1}+m^{n-1}-m^n=m^{n-2}-m^n$; celle du ($n-2$^e.), du ($n-1$^e) et du n^e sera $m^{n-3}-m^{n-2}+m^{n-2}-m^{n-1}+m^{n-1}-m^n=m^{n-3}-m^n$; celle du n^e. et des trois précédens sera $m^{n-4}-m^{n-3}+m^{n-3}-m^{n-2}+m^{n-2}-m^{n-1}+m^{n-1}-m^n=m^{n-4}-m^n$. Et l'on voit que celle du n^e et des $k-1$ précédents est $m^{n-k}-m$; c'est-à-dire que la valeur de k jets, dont le dernier est le n^e. de

X 2

la suite 1, 2, 3, 4, etc., est $m^{n-k}-m^{n}$, où l'on peut remarquer que la différence des exposans est k.

Si l'on fait $k=n$, on trouvera pour la valeur des n premiers jets $1-m^{n}$.

Pour trouver celle des p jets suivans, il faut considérer que le dernier sera le ($n+p^{e}$.) de la suite 1, 2, 3, 4, etc. Cette valeur sera donc $m^{n+p\,p}-m^{n}=m^{n}-m^{n+p}$. De même celle des q jets qui suivent sera $m^{n+p}-m^{n+p+q}$, et celle des r jets suivans $m^{n+\ +q}-m^{n+p+q+r}$, etc.

Si donc il est accordé successivement à A B A B A, et ainsi de suite.
n p q r s, ect. jets.

Le sort de A est $1-m^{n}+m^{n+p}-m^{n+p+q}+m^{n+p+q+r}-m^{n+p+q+r+s}$, ect.

Et le sort de B $m^{n}-m^{n+p}+m^{n+p+q}-m^{n+p+q+r}+$ etc.;
expression algébrique de la régle de Bernoulli.

Au reste, le sort de B étant le complément du sort de A à l'unité, il est facile de voir pourquoi il suffit de retrancher l'unité de ce dernier sort et d'y changer tous les signes, pour avoir le sort de B.

Ces deux séries démontrent aux yeux l'observation de Bernoulli que si le nombre des jets est limité, le dernier terme, qui a pour exposant la somme de tous les jets, doit être rejeté de la série où il a le signe $+$. Car si le nombre des jets est s, et que les joueurs ne puissent outre passer ce nombre, $-m^{s}$ sera le second terme de la valeur du dernier tour, et $+m^{s}$ serait le premier terme de la valeur du tour suivant. Il faut donc rejeter $+m^{s}$, puisque ce tour n'a pas lieu. Par exemple, si le nombre des jets ne peut excéder $n+p$, B aura la valeur $m^{n}-m^{n+p}$, du dernier tour, et il faudra rejeter celle du tour qui suivrait, si le nombre des jets n'était pas limité, savoir, $+m^{n+p}-m^{n+p+q}$, et par conséquent $+m^{n+p}$, de la série qui exprime le sort de A. Et la valeur des deux sorts pris ensemble sera $1-m^{n}+m^{n}-m^{n+p}=1-m^{n+p}$, de sorte que le terme retranché est l'excédent de l'unité sur la somme des sorts, comme l'observe encore l'auteur de la règle.

§. XXIII.

Sur le IIe. problème.

Bernoulli observe que ce problème offre trois questions différentes. Nous allons les parcourir successivement.

QUESTION Ire.

Plusieurs joueurs A, B, C. . . . U, *au nombre de* n *jouent alternativement et toujours dans cet ordre, chacun avec* b *chances* pour *et* c *chances* contre, *jusqu'à ce que l'un d'eux ait gagné : quelle est la raison des sorts?*

Soient x le sort de A, et $b+c=a$.

Il résulte de ce qui a été observé sur la proposition XI que lorsque le tour de B est arrivé, les joueurs qui suivent A ont ensemble $a^{n-1}-c^{n-1}$ chances pour réussir et c^{n-1} pour manquer. Le premier joueur a donc alors $a^{n-1}-c^{n-1}$ chances pour perdre ou pour avoir o, et c^{n-1} pour reprendre son tour et son premier jeu, ou pour avoir x; ce qui lui vaut $\frac{c^{n-1}x}{a^{n-1}}$. Mais quand A commence, il a b chances pour gagner ou pour avoir 1, et c chances pour avoir l'attente précédente, $\frac{c^{n-1}x}{a^{n-1}}$. Son sort est donc $\frac{a^{n-1}b+c^n x}{a^n}$. Et comme ce sort a été appelé x, on a $x=\frac{a^{n-1}b+c^n x}{a^n}$: d'où l'on tire $x=\frac{a^{n-1}b}{a^n-c^n}$.

Le second joueur a évidemment la même attente lorsque son tour est venu. Mais ce joueur a au commencement b chances pour perdre et c pour avoir son tour; c'est-à-dire qu'il a c chances sur a pour avoir $\frac{a^{n-1}b}{a^n-c_n}$, ce qui vaut $\frac{c}{a}$. $\frac{a^{n-1}b}{a^n-c^n}=\frac{a^{n-2}bc}{a^n-c^n}$. C'est le sort de B, ou son attente au commencement du jeu.

C'est aussi celle du troisième joueur, lorsqu'il est à la place du second, et par conséquent lorsque le premier manque : de sorte qu'au commencement le troisième joueur a c chances sur a pour $\frac{a^{n-2}bc}{a^n-c^n}$, et qu'ainsi son sort est $\frac{c}{a}$. $\frac{a^{n-2}bc}{a^n-c^n}=\frac{a^{n-3}bcc}{a^n-c^n}$.

On trouve de même que celui du quatrième est $\frac{c}{a}$. $\frac{a^{n-3}bcc}{a-c_n}=\frac{a^{n-4}bc^3}{a^n-c^n}$, et l'on voit que pour avoir le sort d'un joueur, il suffit de multiplier par $\frac{c}{a}$ le sort du joueur précédent; que celui du m.^e est $\frac{a^{n-m}bc^{m-1}}{a^n-c^n}$, et celui du n.^e, $\frac{bc^{n-1}}{a^n-c_n}$.

C'est ce qu'on peut apercevoir d'un coup d'œil. Car $\frac{a^{n-1}b}{a^n-c^n}$, sort du premier joueur, est également celui de chacun des joueurs dont le tour est venu. Mais le tour du m^e joueur arrive lorsque les $m-1$ joueurs qui le précèdent ont manqué, c'est-à-dire en c^{m-1} cas sur a^{m-1}. Donc le sort du m^e joueur est $\frac{c^{m-1}}{a^{m-1}} \cdot \frac{a^{n-1}b}{a^n-c^n} = \frac{a^{n-m}c^{m-1}b}{a^n-c^n}$.

Et si l'on fait successivement $m = 1, 2, 3, 4 \ldots n$, on trouvera les sorts comme il suit :

Joueurs	1	2	3	4	n.
Sorts	$\frac{a^{n-1}b}{a^n-c^n}$	$\frac{a^{n-2}bc}{a^n-c^n}$	$\frac{a^{n-3}bcc}{a^n-c^n}$	$\frac{a^{n-4}bc^3}{a^n-c^n}$	$\frac{bc^{n-1}}{a^n-c^n}$.

Donc en divisant par $\frac{b}{a^n-c^n}$, on aura, pour le rapport des sorts a^{n-1} : $a^{n-2}c : a^{n-3}cc : a^{n-4}c^3 \ldots . c^{n-1}$:

Où l'on voit que les sorts sont entre eux, comme les termes successifs de la puissance $n-1$ de $a+c$, dégagés de leurs coëfficiens.

Bernoulli qui a d'abord résolu ce problème en nombres d'une manière un peu différente, a trouvé le rapport général qu'on vient de voir, en évaluant les jets successifs. Nous y parviendrons très-aisément d'après l'observation suivante.

Lemme. *Si, en commençant d'abord par le premier, puis par le second, ensuite par le troisième. . . . ; enfin par le* n^e, *terme d'une progression géométrique infinie décroissante (il en est de même d'une progression croissante), on en extrait continuellement les termes par sauts de* n *en* n, *c'est-à-dire, en passant* n—1 *termes à chaque saut, on aura* n *progressions différentes dont les sommes seront dans le rapport des* n *premiers termes de la progression dont elles seront extraites.*

Soient a le premier terme et $\frac{1}{q}$ la raison de la progression principale. Cette progression sera $a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 \ldots \ldots 0$.

Puisqu'il faut passer constamment $n-1$ termes, il est clair que pour trouver un terme quelconque de l'une quelconque des progressions extraites, il faut ajouter n à l'exposant de q dans le terme précédent. Ainsi

La première progression extraite sera $a : aq^n : aq^{2n} : aq^{3n} \ldots . 0$.

La seconde $aq : aq^{n+1} : aq^{2n+1} : aq^{3n+1} \ldots . 0$.

La troisième $aq^2 : aq^{n+2} : aq^{2n+2} : aq^{3n+2} \ldots . 0$.

La n^e. . . . $aq^{n-1} : aq^{2n-1} : aq^{3n-1} : aq^{4n-1} \ldots . 0$.

La somme de la première est $\frac{a}{q^n-1}$; celle de la seconde $\frac{aq}{q^n-1}$; celle de la troisième $\frac{aq^2}{q^n-1}$ . . . . celle de la n^e. $\frac{aq^{n-1}}{q^n-1}$.

Ces sommes sont entre elles :: $a : aq : aq^2$ . . . . . : aq^{n-1}, et par conséquent dans le rapport des n premiers termes de la progression principale.

Pour faire l'application de ce principe à la question actuelle, il suffit de se rappeler que les valeurs successives des jets sont comme il suit:

Numéros des jets	1	2	3	4	n	. . . .	∞
Valeurs.	$\frac{b}{a}$	$\frac{bc}{aa}$	$\frac{bc^2}{a^3}$	$\frac{bc^3}{a^4}$ . . .	$\frac{bc^{n-1}}{a^n}$	. . .	o

C'est-à-dire, en progression géométrique perpétuellement décroissante; et de considérer que le sort du 1er., du 2e., du 3e., du 4e. . . du n^e^. joueur est la somme d'une progression géométrique infinie extraite de n, en n termes de la première, à commencer par le 1er., par le 2e., par le 3e., par le 4e. . . . par le n^e^. terme, et qu'ainsi les sorts de ces différens joueurs sont entr'eux comme les sommes de ces progressions, et partant comme les valeurs de ces n premiers jets, ou :: $\frac{b}{a} : \frac{bc}{aa} : \frac{bc^2}{a^3} : \frac{bc^3}{a^4}$: . . . . : $\frac{bc^{n-1}}{a^n}$, ou (en multipliant tout par $\frac{a^n}{b}$) :: $a^{n-1} : a^{n-2}c : a^{n-3}cc : a^{n-4}c$ . . . . : c^{n-1}.

QUESTION II.

A, B, C . . . . U, *au nombre de* n *jouent alternativement et toujours dans cet ordre jusqu'à ce que l'un d'eux ait gagné, le nombre des chances pour étant* b *à chaque jet, et celui des chances contre* c *au* 1er., c—1 *au* 2e., c—2 *au* 3e. . . . c—n+1 *au* n.^ieme^. : *quelle est la raison des sorts?*

L'auteur de l'art de conjecturer, après avoir résolu ce problème en nombres, ajoute qu'il lui serait facile de donner une règle générale pour trouver le rapport cherché, quel que fût le nombre des chances et des joueurs, c'est-à-dire, de résoudre le problème tel que nous venons de le proposer.

Pour parvenir, s'il est possible, à trouver les sorts d'après la règle annexée à la proposition XII, nous tracerons le tableau suivant:

Numéros des jets,	1	2	3	4	$c+1$	$c+2$
N^bres. des chances pour,	b	b	b	b	b	b
N^bres. des chances contre,	c	$c-1$	$c-2$	$c-3$	0	-1
Sommes des chances,	a	$a-1$	$a-2$	$a-3$	$a-c$	$a-c-1$
Valeurs des jets,	$\frac{b}{a}$	$\frac{bc}{a.a-1}$	$\frac{b.c.c-1}{a.a-1.a-2}$	$\frac{b.c.c-1.c-2}{a.a-1.a-2.a-3}$ . . .	$\frac{b.c.c-1.c-2...1}{a.a-1.a-2.a-3..a-c}$	0

On voit que le dernier jet qui ait quelque valeur est le $(c+1)$.ième., puisque la valeur du $(c+2)$.ième. et des suivans se réduit à o.

Il n'est pas moins évident que les jets qui échéent au $(n-m)$.ième. joueur sont le m^e., le $(n+m)^e$., le $(2n+m)^e$., le $(3n+m)^e$. . . . le $(zn+m)^e$.,

Mais il n'en paraît pas plus facile de trouver les sorts, car il faudrait savoir lequel des joueurs a le $(c+1)^e$. jet, et ce jet peut appartenir soit au 1er., soit au 2e., soit au 3e., soit au n^e.

Si, par exemple, le $(c+1)^e$. jet appartient au 1er. joueur, son sort est

$$\frac{b}{a}\left(1+\frac{c.c-1...c-n+1}{a-1.a-2...a-n}+\frac{c.c-1...c-2n+1}{a-1.a-2...a-2n}+\frac{c.c-1..c-3n+1}{a-1\,a-2..a-3n}...+\frac{c.c-1...1}{a-1.a-2..a-c}\right)$$

Comme $m=1$, le dernier jet est le $(zn+1)^e$.; et le second joueur ne pouvant avoir aucune valeur pour le jet suivant qui lui échéerait d'ailleurs, a pour dernier jet valable le $(\overline{z-1}.n+2)^e$. Mais nous avons supposé $zn+1=c+1$, et partant $z=\frac{c}{n}$. Donc $\overline{z-1}.n+2=c-n+2$. Le dernier des jets qui appartiennent au second joueur est donc le $(c-n+2)^e$., et il a pour sort $\frac{b}{a}\left(\frac{c}{a-1}+\frac{c.c-1...c-n}{a-1.a-2...a-n-1}+\frac{c.c-1...c-2n}{a-1.a-2...a-2n-1}...+\frac{c.c-1...n}{a-1.a-2...a-c+n-1}\right)$

Le numéro du dernier jet appartenant au 3e. joueur est $\overline{z-1}.n+3=\left(\frac{c}{n}-1\right)n+3=c-n+3$, au 4e., $c-n+4$, etc. On trouvera donc aussi le sort du troisième joueur et ceux des suivans, comme ceux du premier et du second, ce qui semble exiger autant de formules qu'il y a de joueurs.

C'est ainsi qu'on peut déterminer les sorts lorsque le $(c+1)^e$. jet appartient au premier joueur, c'est-à-dire, lorsque c est divisible par n, ou lorsque le reste r de cette division est égal à zéro.

Mais

Mais il faut résoudre le problème, quelle que soit la valeur de r, et réduire, s'il se peut, le nombre des formules.

Il n'est pas difficile de voir que le $(r+1)$.e joueur aura le $(c+1)$.e jet, et qu'ainsi le dernier des jets qui appartiendront au r.e, sera le c.e, au $(r-1)$.e, le $(c-1)$.e au $(r-2)$.e, le $(c-2)$.e.... au $(r-\overline{r-1})$.e, ou au premier, le $(c-r+1)$.e, au deuxième, le $(c-r+2)$.e . . . , au $(p+1)$.e . . . , le $(c-r+p+1)$.e

Le sort du premier joueur sera donc $\frac{b}{a}\left(1+\frac{c.c-1...c-n+1}{a-1.a-2...a-n}+\frac{c.c-1...c-2n+1}{a-1.a-2...a-2n}+\frac{c.c-1...r+1}{a-1.a-2...a-c+r}\right)$.

Si l'on appelle $p+1$ le numéro de l'un quelconque des joueurs suivans, jusqu'au $(r+1)$.e inclusivement, il aura pour sort $\frac{b}{a}\left(\frac{c.c-1..c-p+1}{a-1.a-2...a-p}+\frac{c.c-1...c-n-p+1}{a.a-1...a-n-p}+\frac{c.c-1...c-2n-p+1}{a-1.a-2...a-2n-p}+\frac{c.c-1...r-p+1}{a-1.a-2...a-c+r-p}\right.$. Et si l'on fait successivement $p=1, 2, 3, \ldots r$, on aura les sorts des joueurs depuis et non compris le premier jusqu'au $(r+1)$.e inclusivement.

Pour trouver les sorts des $n-r-1$ derniers joueurs, il faut observer que le $(r+1)$.e, ayant le $(zn+r+1)$.e jet, qui est le $(c+1)$.e, et le $(r+2)$.e, ne pouvant avoir le jet suivant, puisque le $(c+1)$.e est le dernier, a nécessairement pour dernier jet le $(\overline{z-1}.n+r+2)$.e, ou celui dont le numéro est $\overline{z-1}.n+r+2=\left(\frac{c-r}{n}-1\right)n+r+2=c-n+2$. Le $(r+2)$.e joueur aura donc pour dernier jet le $(c-n+2)$.e, et par conséquent, le $(r+3)$.e aura le $(c-n+3)$.e, et en général, le $(r+1+s)$.e aura le $(c-n+1+s)$.e pour dernier jet.

Donc le sort de l'un quelconque des $n-r-1$ derniers joueurs est:
$\frac{b}{a}\left(\frac{c.c-1...c-r-s+1}{a-1.a-2...a-r-s}+\frac{c.c-1...c-n-r-s+1}{a-1.a-2...a-n-r-s}+\frac{c.c-1..c-2n-r-s+1}{a-1.a-2...a-2n-r-s}\ldots+\frac{c.c-1..n-s+1}{a-1.a-2...a-c+n-s}\right)$. Si l'on substitue successivement à s, 1, 2, 3, ... $n-r-1$, on aura les sorts de tous les joueurs qui suivent le $(r+1)$.e

Nous avons donc trois formules qui font connaître les sorts de tous les joueurs, et dont la première indique le sort du premier joueur, la seconde, les sorts des joueurs suivans, jusqu'au $(r+1)$.e inclusivement, et la troisième, ceux des joueurs qui suivent le $(r+1)$.e

Si l'on fait $a=12$, $b=4$, $c=8$, $n=3$, on aura $r=2$, et l'espèce proposée par Huyghens, et résolue par Bernoulli. Ces valeurs étant substituées

dans la première formule, on trouvera pour le sort du 1er. joueur $\frac{4}{12}$
$$\left(1 + \frac{8.7.6}{11.10.9} + \frac{8.7.6.5.4.3.}{11.10.9.8.7.6}\right).$$

Les sorts des joueurs suivans, jusqu'au $(r+1)$.^{e} inclusivement, se trouveront en faisant de plus, 1°. $p=1$, 2°. $p=2$, dans la 2e. formule.

Le sort du 2e. est donc $\frac{4}{12}\left(\frac{8}{11} + \frac{8.7.6.5}{11.10.9.8} + \frac{8.7.6.5.4.3.2}{11.10.9.8.7.6.5}\right)$.

Et celui du 3e. $\frac{4}{12}\left(\frac{8.7}{11.10} + \frac{8.7.6.5}{11.10.9.8.7} + \frac{8.7.6.5.4.3.2.1}{11.10.9.8.7.6.5.4}\right)$.

Le 3e., ou le $(r+1)$.^{e} joueur étant le dernier, la 3e. formule devient inutile.

QUESTION III.

Cette question a été résolue de deux manières par Bernoulli. Il en indique une troisième dans l'application de ce qu'il appelle sa méthode ordinaire, qui consiste à évaluer les jets successifs. Pour rendre cette application plus sensible, nous poserons la question de la manière suivante :

A, B *et* C *jouant alternativement et toujours dans cet ordre, jusqu'à ce que l'un des trois ait gagné, les chances pour étant constamment au nombre de 4, et les chances contre au nombre de 8 au premier tour, de 7 au second, de 6 au troisième, et ainsi de suite, en décroissant toujours d'une unité à chaque tour : quelle est la raison des sorts ?*

Les sorts s'apercevront rapidement dans ce tableau, dont le célèbre annotateur a donné le modèle général sur la proposition XII.

Ordre du jeu.	*A*	*B*	*C*	*A*	*B*	*C*	*A*	*B*	*C*	*A*	*B*	*C*	*A*	*B*	*C*	*A*	*B*	*C*	&c.
Numéros des jets.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	&c.
N.bres des chances p^r.	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	&c.
N.bres des chances c^{re}.	8	8	8	7	7	7	6	6	6	5	5	5	4	4	4	3	3	3	&c.
Sommes des chances.	12	12	12	11	11	11	10	10	10	9	9	9	8	8	8	7	7	7	&c.

Les chances contre se réduisant à 0 au 25e. jet, qui, par conséquent, est le dernier, et qui échet au premier joueur, on trouvera :

$$\text{Sort de } A = \frac{4}{12}\left(1 + \frac{8^3}{12^2.11} + \frac{8^3.7^3}{12^2.11^3.10} + \frac{8^3.7^3.6^3}{12^2.11^3.10^3.9} + \frac{8^3.7^3.6^3.5^3}{12^2 11^3..10^3.9^3.8} + \frac{8^3.7^3...4^3}{12^2.11^3...8^3.7} \pm \frac{8^3.7^3...3^3}{12^2.11^3...7^3.6} + \frac{8^3.7^3...2^3}{12^2.11^3...6^3.5} + \frac{8^3.7^3..1^3}{12^2.11^3...5^3.4}\right).$$

$$\text{Sort de } B = \frac{4}{12}\left(\frac{8}{12} \mp \frac{8^3.7}{12^2.11^3} + \frac{8^3.7^3.6}{12^2.11^3.10^2} + \frac{8^3.7^3.6^3.5}{12^2.11^3.10^3.9^2} + \frac{8^3.7^3...4}{12^2.11^3.10^3...8^2} + \frac{8^3.7^3..3}{12^2.11^3.10^3...7^2} + \frac{8^3.7^3...2}{12^2.11^3.10^3...6_2} + \frac{8^3.7^3...1}{12^2.11^3 10^3.5_2}\right).$$

$$\text{Sort de } C = \frac{4}{12}\left(\frac{8^2}{12^2} + \frac{8^3.7^2}{12^2.11^3} + \frac{8^3.7^3.6^2}{12^2.11^3.10^3} + \frac{8^3 7^3...5^2}{12^2.11^3...9^3} + \frac{8^3 7^3...4^2}{12^2.11^3...8^3} + \frac{8^3.7^3...3^2}{12^2.11^3...7^3} + \frac{8^3.7^3.2^3}{12^2 11^3...6^3} + \frac{8^3.7^3...1^3}{12^2.11^3...5^3}\right).$$

Si, après avoir supprimé les facteurs communs aux numérateurs et aux dénominateurs de toutes ces fractions, et divisé par $\frac{4}{12}$, on réduit le tout au dénominateur $12^2.11^3...5$, appartenant au dernier terme du sort de C, et qu'on divise ensuite par $4^1.3^3.2^3 = 2^3.3^3$, on trouvera sort de A : sort de B : sort de C :: 58288932 : 38082330 : 24916113, ou (en divisant par 9) :: 6476548 : 4231370 : 2768457.

§. XXIV.

Sur le IIIe. Problème.

Solution générale.

Pour résoudre généralement la question, nous la poserons en ces termes: *On suppose* m *espèces de choses,* n *de chaque espèce ; il faut en* m *tirages en amener* m *d'espèces différentes : quelle est la probabilité de réussir?*

Nous pouvons commencer le calcul par le dernier tirage, ou par le premier.

1. Le dernier ou m^e. tirage ne peut valoir, à moins qu'aux $m-1$ précédens on ait obtenu $m-1$ choses d'espèces différentes, autrement le joueur aurait déjà perdu. Alors il manque une chose à chacune de $m-1$ espèces, et l'autre est encore composée de n choses. Donc le nombre des choses sur lesquelles s'exerce le dernier tirage est $(m-1)(n-1)+n$, et il y a

$(m-1)(n-1)$ chances pour avoir une chose de l'une des espèces entamées, et par conséquent deux d'une espèce, et pour perdre ou pour avoir o, et n chances pour en avoir une de l'espèce encore complète, ou pour en avoir une de chaque espèce pour gagner ou pour avoir 1. Donc alors la probabilité de gagner, ou l'attente du joueur, est $\frac{n}{mn-m+1} = \frac{n}{k+1}$, si, pour abréger, l'on fait $mn - m = k$.

Pour qu'il y ait lieu au $(m-1)^e$ tirage, il faut que les $m-2$ précédens ayent donné $m-2$ choses d'espèces différentes, et par conséquent qu'il y ait $m-2$ espèces chacune de $n-1$ choses et 2 de n, et qu'il reste $(m-2)(n-1)+2n$ choses, et partant qu'il y ait $(m-2)(n-1)$ chances pour perdre et $2n$ pour avoir, en commençant le m^e. tirage, $m-1$ choses de différentes espèces et le sort précédent: de sorte que la probabilité est alors $\frac{2n}{(m-2)(n-1)+2n} \times \frac{n}{k+1} = \frac{1.2 \times nn}{(k+1)(k+2)}$.

Le $(m-2)^e$. tirage ne peut rien donner, si aux $m-3$ premiers il n'est sorti $m-3$ choses d'espèces différentes, ce qui suppose $m-3$ espèces chacune de $n-1$ choses et 3 de n. Il y a donc $(m-3)(n-1)$ chances pour o, et $3n$ pour la probabilité qu'on vient de voir, et la probabilité présente est
$$\frac{3n}{(m-3)(n-1)+3n} \times \frac{1.2 \times nn}{k+1.k+2} = \frac{1.2.3 \times n^3}{k+1.k+2.k+3}.$$

Au $(m-3)^e$. tirage il doit y avoir $m-4$ espèces chacune de $n-1$ choses et 4 de n: la probabilité est donc
$$\frac{4n}{(m-4)(n-1)+4n} \times \frac{1.2.3 \times n^3}{k+1.k+2.k+3} = \frac{1.2.3.4 \times n^4}{k+1.k+2.k+3.k+4}.$$

On trouve de même qu'au $(m-4)^e$ tirage la probabilité est $\frac{1.2.3...5 \times n^5}{k+1.k+2.k+3..k+5}$ au $m-5^e$., $\frac{1.2.3....6 \times n^6}{k+1.k+2.k+3...k+6}$. Et il est manifeste qu'au $(m-\overline{m-1})^e$., ou au premier, ou au commencement du jeu, la probabilité est
$$\frac{1.2.3...m \times n^m}{k+1.k+2.k+3...k+m} = \frac{1.2.3...m \times n^m}{k+1.k+2.k+3...mn.}$$

Tel est le sort du joueur.

Soient $n=10$, $m=4$ et partant $k=36$, $mn=40$, $n^m=10000$: on a pour la probabilité cherchée $\frac{1.2.3.4 \times 10000}{37.38.39.40} = \frac{1000}{37.19.13} = \frac{1000}{9139}$.

2. Il est aisé de voir qu'au premier tirage l'attente du joueur est la même qu'au second: car le premier ne fait que déterminer l'espèce hors de laquelle doivent être les $m-1$ choses d'espèces différentes qui restent à tirer. Mais

pour s'épargner ce raisonnement même, on peut observer qu'au premier tirage il y a mn chances sur mn pour passer au second, et qu'ainsi la probabilité de passer au second est $\frac{mn}{mn}$.

Au deuxième tirage il y aura une espèce composée de $n-1$ choses, et $m-1$ espèces composées de n choses. Les chances favorables, ou pour passer au tirage suivant, seront donc au nombre de $(m-1).n$, et les chances contraires au nombre de $n-1$, la totalité des chances étant $mn-1$, et la probabilité de passer au troisième tirage sera $\frac{(m-1).n}{mn-1} = \frac{mn-n}{mn-1}$.

Au troisième tirage, il y aura deux espèces chacune de $n-1$ choses [autrement ce tirage n'aurait pas lieu] et $m-2$ espèces composées de n choses; c'est-à-dire qu'il y aura $mn-2n$ chances sur $mn-2$ pour passer au quatrième. Cette probabilité est donc $\frac{mn-2n}{mn-2}$.

Au quatrième il faudra qu'il y ait $m-3$ espèces composées de n choses, de sorte que la probabilité de passer au cinquième sera $\frac{mn-3n}{mn-3}$.

De même au cinquième tirage la probabilité de passer au sixième sera $\frac{mn-4n}{mn-4}$, et l'on voit qu'au m^e. la probabilité d'avoir le dépôt 1 ou de gagner, sera $\frac{mn-(m-1).n}{mn-(m-1)} = \frac{n}{mn-m+1}$.

Ainsi, au premier tirage,

La probabilité de passer au deuxième est $\frac{mn}{mn}$.

Celle de passer au troisième est $\frac{mn}{mn} \cdot \frac{mn-n}{mn-1}$.

Celle de passer au quatrième est $\frac{mn}{mn} \cdot \frac{mn-n}{mn-1} \cdot \frac{mn-2n}{mn-2}$.

Celle de passer au cinquième est $\frac{mn}{mn} \cdot \frac{mn-n}{mn-1} \cdot \frac{mn-2n}{mn-2} \cdot \frac{mn-3n}{mn-3}$.

Et celle de passer au dernier et d'avoir $\frac{n}{mn-m+1}$, valeur de ce tirage, est $\frac{mn.\ mn-n.\ mn-2n.\ mn-3n \ldots n}{mn.\ mn-1.\ mn-2.\ mn-3 \ldots mn-m+1}$, sort du joueur.

Si l'on fait attention que les m facteurs, tant du numérateur que du dénominateur de cette formule, constituent deux progressions arithmétiques, la première ayant pour différence $-n$, et la seconde -1, on y reconnaîtra aisément la formule précedente, dont elle ne diffère que par la forme.

§. XXV.

Sur le IVe. Problème.

Solution par la méthode de Huyghens.

Il s'agit de calculer le sort d'un joueur qui parie qu'en tirant 7 jetons entre 8 noirs et 4 blancs, il en amènera 3 blancs et 4 noirs.

Supposons que le joueur tire ses jetons successivement, ou un à un, et voyons quel est son état relativement à chacun des sept tirages, en commençant par le dernier.

Le 7e. ne peut valoir que dans le cas où il resterait 1 ou 2 jetons blancs. Car il ne peut en rester que 0, 1, 2, 3, ou 4. S'il en reste 0, le joueur a perdu, puisqu'il en a amené 4; s'il en reste 3, il n'en a amené qu'un; il faudrait donc qu'il en amenât 2 au 7e. tirage, ce qui ne se peut: il a donc encore perdu, à plus forte raison, s'il en reste 4. Ainsi, le 7e. tirage ne peut valoir que sur 1 jeton blanc et 5 noirs, ou sur 2 jetons blancs et 4 noirs. Or, s'il reste 1 jeton blanc et 5 noirs, le joueur a encore une chance pour amener encore un jeton blanc, et par conséquent pour les avoir tous quatre, ce qui le fait perdre, et 5 chances pour amener un jeton noir, et par conséquent pour avoir 3 jetons blancs et 4 noirs, ce qui le fait gagner. Le 7e tirage vaut donc alors $\frac{1.0+5.1}{6}=\frac{5}{6}$. On trouvera de la même manière que s'il reste 2 jetons blancs et 4 noirs, le 7e. tirage vaudra $\frac{1}{3}$.

Au 6e. tirage, il y aura 5 jetons d'enlevés, et il en restera 7, et ce tirage ne pourra valoir que sur 1 jeton blanc et 6 noirs, ou sur 2 jetons blancs et 5 noirs, ou sur 3 jetons blancs et 4 noirs. Car, s'il ne reste point de jetons blancs, le joueur a perdu, et s'il en reste 4, il a également perdu, puisqu'il n'en a pas encore amené, et qu'il ne peut en amener 3 en deux tirages. Or, s'il reste un jeton blanc et 6 noirs, il y a une chance pour amener un jeton blanc ou pour perdre, et 6 chances pour avoir à tirer la 7e. fois sur un blanc et 5 noirs, ou pour avoir $\frac{5}{6}$. Le 6e. tirage vaut donc alors

$\frac{1.0+6.\frac{5}{6}}{7}=\frac{5}{7}$. S'il reste 2 jetons blancs et 5 noirs, il y a deux chances pour avoir à tirer sur un blanc et 5 noirs, ce qui vaut $\frac{5}{6}$, et 5 chances pour amener 1 noir et pour avoir à tirer sur 2 blancs et 4 noirs, ce qui vaut $\frac{1}{3}$: donc alors le 6e. tirage vaut $\frac{2\frac{5}{6}+5\frac{1}{3}}{7}=\frac{10}{21}$. S'il reste 3 jetons blancs et 4 noirs, il y a trois cas pour avoir à tirer sur 2 jetons blancs et 4 noirs, ce qui vaut $\frac{1}{3}$, et 4 cas pour avoir à tirer en dernier lieu sur 3 blancs et 3 noirs, ce qui vaut zéro. Ainsi, le sixième tirage vaut alors $\frac{3\frac{1}{3}+4.0}{7}=\frac{1}{7}$.

On trouvera de même que le 5e. tirage ne pourra valoir que sur 1 jeton blanc et 7 noirs, ou 2 blancs et 6 noirs, ou 3 blancs et 5 noirs, ou 4 blancs et 4 noirs; qu'au 4e. tirage il y aura 3 jetons d'enlevés, et qu'ainsi il en restera neuf, et que comme il n'y a en tout que 8 jetons noirs, il restera nécessairement 1, 2, 3 ou 4 jetons blancs, de sorte que ce tirage se fera sur 1 jeton blanc et 8 noirs ou sur 2 jetons blancs et 7 noirs etc; que par la même raison, le 3e. tirage ne pourra se faire que sur 2 jetons blancs et 8 noirs, ou sur 3 jetons blancs et 7 noirs, ou sur 4 jetons blancs et 6 noirs; que le 2e. ne pourra se faire que sur 3 jetons blancs et 8 noirs, ou sur 4 jetons blancs et 7 noirs, comme le 1er. sur 4 blancs et 8 noirs.

Maintenant, comme les valeurs du 7e. tirage ont donné celles du 6e., les valeurs du 6e. donneront celles du 5e. qui donneront celles du 4e. et ainsi de suite jusqu'à celles du 1er., comme on peut le voir dans le tableau suivant, qui suffit pour expliquer très-clairement cette méthode.

	Blancs restans	Noirs restans	vaut
7e. Tirage.	1	5	$\frac{5}{6}$
	2	4	$\frac{1}{3}$
6e. Tirage.	1	6	$\frac{5}{7}$
	2	5	$\frac{10}{21}$
	3	4	$\frac{1}{7}$
5e. Tirage.	1	7	$\frac{5}{8}$
	2	6	$\frac{15}{28}$
	3	5	$\frac{25}{56}$
	4	4	$\frac{1}{14}$

	Blancs restans.	Noirs restans.	vaut
4e. Tirage.	1	8	$\frac{5}{9}$
	2	7	$\frac{5}{9}$
	3	6	$\frac{5}{14}$
	4	5	$\frac{10}{63}$
3e. Tirage.	2	8	$\frac{5}{9}$
	3	7	$\frac{5}{12}$
	4	6	$\frac{5}{21}$
2e. Tirage.	3	8	$\frac{5}{11}$
	4	7	$\frac{10}{33}$
1er. Tirage.	4	8	$\frac{35}{99}$

§.

§. XXVI.

Sur le 5e. Problème.

Démonstration de la formule de Bernoulli.

Pour déterminer le rapport des sorts de deux joueurs A et B dont l'un parie contre l'autre d'avoir gagné le premier, un à un, tous les écus de son adversaire, Bernoulli donne une formule qu'il ne démontre pas. Si m est le nombre des écus de A, b le nombre des chances qui lui font gagner un écu, c le nombre de celles qui lui en font perdre un, ou qui le font gagner à B, et n le nombre des écus de B, le rapport qu'il s'agit de trouver est $\frac{b^n c^m - b^{m+n}}{c^{m+n} - b^n c^m}$.

Si nous faisons successivement $m+n=2, 3, 4, 5, 6 \ldots$ et que nous cherchions le sort de A pour chacune des valeurs que pourra avoir m avant la perte ou le gain de la partie dans chacune de ces suppositions, nous parviendrons à découvrir la formule indiquée.

$$m+n=2$$

Si $m+n=2$, m ne pourra avoir d'autre valeur que 1; et comme A aura b chances pour gagner et c pour perdre, son sort sera $\frac{b}{b+c}$.

$$m+n=3$$

Dans l'hypothèse de $m+n=3$, A peut avoir avant le gain ou la perte 1 ou 2 écus. Soient donc 1, 2 les nombres des écus de A,
et t, u les attentes correspondantes de ce joueur.

S'il a un écu, il a b chances pour en avoir un de plus ou pour u, et c pour perdre celui qu'il a ou pour o, ce qui vaut $\frac{bu}{b+c}$

S'il a deux écus, il a b chances pour avoir le dernier ou l'unique écu de B ou pour en avoir trois et gagner la partie, et c chances pour n'en avoir plus qu'un ou pour t, ce qui vaut $\frac{b+ct}{b+c}$.

On a donc $t = \frac{bu}{b+c}$, et $u = \frac{b+ct}{b+c}$.

Si dans la seconde équation l'on substitue à t sa valeur tirée de la première, on a $u = \frac{b(b+c)+bcu}{b^2+2bc+cc} = \frac{bb+bc}{bb+bc+cc}$: et cette valeur substituée à u dans la

première équation donne $\frac{bcb.(b+c)}{(b+c)\,bb+bc+cc} = \frac{bb}{bb+bc+cc}$.

On a donc

Si $m=1$, sort de $A = \frac{bb}{bb+bc+cc}$.

Si $m=2$, sort de $A = \frac{bb+bc}{bb+bc+cc}$.

$$m+n=4.$$

Dans cette hypothèse A ne peut avoir avant la perte ou le gain de la partie que 1, 2 ou 3 écus.

Soient 1, 2, 3 les nombres des écus de A,

et t, u, x les attentes correspondantes à ces nombres.

On aura $t = \frac{bu}{b+c}$; $u = \frac{bx+ct}{b+c}$; $x = \frac{b+cu}{b+c}$.

Substituant dans la seconde équation la valeur de t donnée par la première, on a $u = \frac{(b+c)\,bx+cbu}{(b+c)^2}$: d'où l'on tire $x = \frac{(bb+bc+cc)\,u}{b\,(b+c)}$. Comparant cette valeur de x avec celle de la dernière équation, on a $\frac{(bb+bc+cc)\,u}{b} = b+cu$, et partant $u = \frac{bb}{bb+cc}$, valeur qui, substituée dans la première équation, donne $t = \frac{b^3}{b^3+bbc+bcc+c^3}$. La même valeur de u, substituée dans la troisième, donne $x = \frac{b^3+bbc+bcc}{b^3+bbc+bcc+c^3}$.

Rapprochant ces trois valeurs, on a

Si $m=1$, sort de $A = \frac{b^3}{b^3+bbc+bcc+c^3}$.

Si $m=2$, sort de $A = \frac{bb}{bb+cc} = \frac{b^3+bbc}{b^3+bbc+bcc+c^3}$.

Si $m=3$, sort de $A = \frac{b^3+bbc+bcc}{b^3+bbc+bcc+c^3}$.

$$m+n=5.$$

On trouvera de même le sort de A, si $m+n=5$; car,

m étant $1, 2, 3, 4,$

et sort de A $t, u, x, y,$

on aura $t=\frac{cu}{b+c}$, $u=\frac{bx+ct}{b+c}$, $x=\frac{by+cu}{b+c}$, $y=\frac{b+cy}{b+c}$.

Ces quatre équations feront connaître les valeurs des quatre inconnues, t, u, x, y, et l'on trouvera que

Si $m=1$, sort de $A=\frac{b^4}{b^4+b^3c+bbcc+bc^3+c^4}$.

Si $m=2$, sort de $A=\frac{b^4+b^3c}{b^4+b^3c+bbcc+bc^3+c^4}$.

Si $m=3$, sort de $A=\frac{b^4+b^3c+bbcc}{b^4+b^3c+bbcc+bc^3+c^4}$.

Si $m=4$, sort de $A=\frac{b^4+b^3c+bbcc+bc^3}{b^4+b^3c+bbcc+bc^3+c^4}$.

$$m+n=6.$$

Et, dans l'hypothèse de $m+n=6$, on a

Si $m=1$, sort de $A=\frac{b^5}{b^5+b^4c+b^3cc+bbc^3+bc^4+c^5}$.

Si $m=2$, sort de $A=\frac{b^5+b^4c}{b^5+bc^4+b^3cc+bbc^3+bc^4+c^5}$.

Si $m=3$, sort de $A=\frac{b^5+b^4c+b^3cc}{b^5+b^4c+b^3cc+bbc^3+bc^4+c^5}$.

Si $m=4$, sort de $A=\frac{b^5+b^4c+b^3cc+b^2c^3}{b^5+b_4c+b^3cc+bbc^3+bc^4+c^5}$.

Et Si $m=5$, sort de $A=\frac{b^5+b^4c+b^3cc+bbc^3+bc^4}{b^5+b^4c+b^3cc+bbc^3+bc^4+c^5}$.

Maintenant il est aisé de voir que le sort de A a constamment pour dénominateur la somme de $m+n$, termes d'une progression géométrique dans le rapport de b à c, dont le premier terme est b élevé à la puissance $m+n-1$, et que ce sort a pour numérateur la somme de m termes de cette même progression.

Le dernier des m termes du numérateur étant $b^n c^{m-1}$, leur somme est

$$\frac{\frac{c}{b}.\, b^n c^{m-1} - b^{m+n-1}}{\frac{1}{b}(c-b)} = \frac{b^n c^m - b^{m+n}}{c-b}.$$

Si donc on appelle D le dénominateur, le sort de A est $\frac{b^n c^m - b^{m+n}}{(c-b).D}$.

Et si l'on substitue par tout n à m et c à b, on aura évidemment le sort de B, qui est par conséquent $\frac{c^m b^n - c^{n+m}}{(b-c)D} = \frac{c^{n+m} - b^n c^m}{(c-b).D}$; car il est clair que la substitution de c à b ne fait pas varier D.

Ainsi sort de A : sort de B :: $\frac{b^n c^m - b^{m+n}}{(c-b).D}$ :: $\frac{c^{n+m} - b^n c^m}{(c-b).D}$ :: $b^n c^m - b^{m+n}$: $c^{m+n} - b^n c^m$.

Pour avoir une expression abrégée de chacun des deux sorts, on sommera D; et l'on trouvera sort de $A = \frac{b^n c^m - b^{m+n}}{(c-b)\frac{c^{m+n} - b^{m+n}}{c-b}} = \frac{b^n c^m - b^{m+n}}{c^{m+n} - b^{m+n}}$

et en substituant c à b et n à m, on aura sort de $B = \frac{b^n c^m - c^{m+n}}{b^{m+n} - c^{m+n}} = \frac{c^{m+n} - b^n c^m}{c^{m+n} - b^{m+n}}$, comme on peut s'en convaincre encore en retranchant de l'unité le sort de A.



